Dans tous ces exercices, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

Exercice 1

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(2;-2;1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}=3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+\vec{k}$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point I milieu du segment [AB] où $A(2;5;-1)$ et $B(0;-3;1)$, et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1;0;2)$.

3. Soit (D) une droite de l'espace définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t \\ z=2+2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D) et deux points de cette droite.

Exercice 2

1. On considère dans l'espace les deux vecteurs

$$\vec{u}(-1;2;7) \quad \text{et} \quad \vec{v}=2\vec{\imath}+m\vec{\jmath}+3\vec{k}$$

où m est un nombre réel.

Déterminer la valeur du nombre réel m pour laquelle les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

2. On considère dans l'espace les trois points suivants $A(1;0;1)$, $B(0;-1;1)$ et $C(0;1;1)$.

2. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2. b. Que peut-on conclure ?

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ et les deux normes $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$:

a. $\vec{u}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}$; $\vec{v}=\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$

b. $\vec{u}=3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+2\sqrt{3}\,\vec{k}$; $\vec{v}(-3;1;0)$

c. $\vec{u}(2;1;0)$; $\vec{v}=\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+3\vec{k}$

d. $\vec{u}(-1;1;1)$; $\vec{v}(2;4;-2)$

Exercice 4

1. Soit $(\mathcal{P})$ le plan défini par l'équation cartésienne $(\mathcal{P}):\ 2x+y-z+1=0$.

Les points $A(0;2;3)$ et $B(1;1;-1)$ appartiens-ils au plan $(\mathcal{P})$.

2. Soient $(\mathcal{P})$ le plan défini par l'équation cartésienne: $(\mathcal{P}):\ x+2y-z+1=0$, et la droite (D) définie par la représentation paramétrique: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-1-t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

Étudier l'intersection du plan $(\mathcal{P})$ et la droite (D)

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, montrer que les deux droites (D) et (D') sont orthogonaux.

1. La droite (D) dirigée par le vecteur $\vec{u}(1;3;-2)$ et la droite (D') définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x=3+t \\ y=4+t \\ z=-1+2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

2. La droite (D) définie par les équations cartésiennes suivantes : $x-2=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{5-z}{2}$, et la droite (D') définie par la représentation paramétrique suivante : $\begin{cases} x=3+2t \\ y=5-3t \\ z=-2-2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

Exercice 6

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P}')$ passant par le point $A'(1;2;-1)$, et dont $\vec{n'}(-2;3;1)$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P}')$.

2. Soit $(\mathcal{P})$ le plan défini par l'équation cartésienne: $(\mathcal{P}):\ 2x+3y-z+4=0$.

2. a. Déterminer les coordonnées d'un point A appartenant au plan $(\mathcal{P})$.

2. b. Vérifier que le point $B(1;0;1)$ n'appartient pas au plan $(\mathcal{P})$.

2. c. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal au plan $(\mathcal{P})$.

2. d. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point B, et orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

2. e. En déduire les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point B sur le plan $(\mathcal{P})$.

Exercice 7

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par le point A$(1;2;-1)$ et dont $\vec{n}(1;0;-4)$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par le point B$(-2;1;-1)$ et orthogonal à la droite (D) définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Exercice 8

1. Soient $(\mathcal{P})$ le plan défini par l'équation : $(\mathcal{P})$: $2x + 2y - z + 1 = 0$, et A$(1;1;2)$ et B$(-1;1;1)$ deux points de l'espace. Calculer : $d(\text{A};(\mathcal{P}))$ et $d(\text{B};(\mathcal{P}))$.
2. Calculer la distance du point E$(0;1;-1)$ au plan $(\mathcal{P})$ passant par le point F$(3;1;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;2;-2)$.

Exercice 9

Soient $(\mathcal{P})$ le plan défini par l'équation cartésienne : $(\mathcal{P})$: $x + y + z + 1 = 0$, et A$(1;2;0)$ un point de l'espace.

1. Calculer $d(\text{A};(\mathcal{P}))$ la distance de A au plan $(\mathcal{P})$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point A, et orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.
3. En déduire les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point A sur le plan $(\mathcal{P})$.

Exercice 10

1. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de centre $\Omega(1;2;0)$ et da rayon $\text{R} = \sqrt{3}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) de centre $\Omega(1;-1;2)$ et qui passe par le point A$(1;4;5)$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S) dont le segment [AB] est un diamètre où A$(-1;0;3)$ et B$(2;5;4)$.

Exercice 11

Déterminer l'ensemble des points M$(x;y;z)$ de l'espace qui vérifient l'équation (E), dans chacun des cas suivants :

1. (E) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 10 = 0$.
2. (E) : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4z + 5 = 0$.
3. (E) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 3 = 0$.
4. (E) : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z + 10 = 0$.
5. (E) : $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 2z + 5 = 0$.
6. (E) : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 19 = 0$.

Exercice 12

On considère l'ensemble (S) tel que :
(S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$

1. Montrer que l'ensemble (S) est une sphère (déterminer son centre et son rayon).
2. Étudier dans chacun des cas suivants la position relative de la sphère (S) et le plan $(\mathcal{P})$ où :
   - 2.a. $(\mathcal{P})$: $2x + y + 2z - 3 = 0$
   - 2.b. $(\mathcal{P})$: $x - 2y + 2z + 3 = 0$
   - 2.c. $(\mathcal{P})$: $x + 2y - z + 9 = 0$

Exercice 13

Soient (S) une sphère définie par l'équation cartésienne : (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - x - \frac{1}{4} = 0$, et $(\mathcal{P})$ le plan défini par l'équation cartésienne :

$$(\mathcal{P}) : y + z - 1 = 0$$

1. Déterminer le centre et le rayon de (S).
2. Montrer que le plan $(\mathcal{P})$ est tangent à (S).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point Ω, centre de la sphère (S), et orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.
4. En déduire les coordonnées du point H point d'intersection de la sphère (S) et le plan $(\mathcal{P})$.

Exercice 14

Soit (S) une sphère définie par l'équation cartésienne suivante :

$$(\text{S}) : x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 4z + 9 = 0$$

1. Déterminer le centre et le rayon de (S).
2. Vérifier que A$(-\sqrt{2}; 2; 3)$ appartient à (S).
3. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ tangent à la sphère (S) au point A.

Exercice 15

Soient $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ deux plans définis respectivement par les équations cartésiennes :
$(\mathcal{P}) : x - y + z = 0$ et $(\mathcal{Q}) : 2x + 3y + z - 6 = 0$

Soient (S) la sphère de centre $\Omega(1; 2; 4)$ et tangente au plan $(\mathcal{P})$,
et (D) la droite passant par Ω et orthogonale au plan $(\mathcal{Q})$.

1. Montrer que les deux plans $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{Q})$ sont orthogonaux.
2. Déterminer le rayon R de la sphère (S).
3. En déduire une équation cartésienne de la sphère (S).
4. Déterminer le point d'intersection du plan $(\mathcal{P})$ et la sphère (S).
5. Déterminer le point d'intersection de la droite (D) et le plan $(\mathcal{Q})$.
6. Montrer que le plan $(\mathcal{Q})$ coupe la sphère (S) selon un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 16

Soient (S) une sphère définie par l'équation cartésienne suivante :
(S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z + 8 = 0$,
$(\mathcal{P})$ le plan défini par l'équation cartésienne suivante : $(\mathcal{P})$: $3x + 5y + z - 7 = 0$, et (D) la droite passant par le point A$(2; 3; -3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

1. Déterminer le centre et le rayon de (S).
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D).
3. Montrer que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points dant on déterminera les coordonnées.
4. Montrer la droite (D) est parallèle au plan $(\mathcal{P})$.

Exercice 17

1. Calculer la distance du point M$(3; 2; 1)$ à la droite (D) définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = -t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$,
puis déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point M sur (D).

2. Calculer la distance du point M$(3; 2; 1)$ à la droite (D) définie par les équations cartésiennes suivantes : $x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{2}$,
puis déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point M sur (D).

3. Calculer la distance du point M$(3; 2; 1)$ à la droite (D) définie par le système d'équations suivant : $\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 2' \end{cases}$
puis déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point M sur (D).

Exercice 18

On considère dans l'espace les trois points
A$(1; 2; 1)$, B$(1; 3; 1)$ et C$(1; 0; 1)$
et (S) une sphère de centre $\Omega(-3; 0; 1)$ et de rayon $R = 2\sqrt{2}$.

1. a. Montrer que : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = -\vec{\imath} + \vec{k}$
où O est l'origine du repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.

1. b. Vérifier que : $x - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

2. a. Calculer la distance du point Ω au plan (OAB).

2. b. Que peut-on conclure ?

3. Déterminer une équation cartésienne de (S).

4. Soit (D) la droite passant par le point Ω et orthogonale au plan (OAB).

4. a. Montrer que : $\begin{cases} x = -3 - t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (D).

4. b. Déterminer les coordonnées du point H point d'intersection de la sphère (S) et le plan (OAB).

4. c. Montrer que la droite passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{u}(2;0;-2)$ est tangente à la sphère (S).

Exercice 19

On considère dans l'espace l'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ vérifiant l'équation:

$$(S):\ x^2+y^2+z^2-6x+4z+9=0,$$

et les trois points :

$$A(1;1;1), B(3;1;0) \text{ et } C(1;0;-2)$$

1. Montrer que l'ensemble (S) est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R.

2. a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

2. b. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. d. Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

3. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ tangent à la sphère (S) au point C.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) l'intersection du deux plans $(\mathcal{P})$ et (ABC).

5. Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S′) tangente au plan (ABC) au point A, de centre A′ appartient au plan $(\mathcal{P}')$ d'équation cartésienne $(\mathcal{P}'):x+y+z=0$.

Exercice 20

On considère dans l'espace les trois points

$$A(-1;0;3), B(3;0;0) \text{ et } C(7;1;-3)$$

et (S) une sphère définie par l'équation cartésienne suivante :

$$(S):x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$$

1. Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$,
et en déduire que : $3x+4z-9=0$ est une équation du plan (ABC).

2. Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(3;1;0)$, et que son rayon est $R=5$.

3. Soit (D) la droite passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC).

3. a. Montrer que : $\begin{cases}x=3+3t\\y=1\\z=4t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (D).

3. a. Montrer que la droite (D) coupe la sphère (S) en $E(6;1;4)$ et $F(0;1;-4)$.

Exercice 21

On considère dans l'espace les deux points

$$A(2;1;0) \text{ et } B(-4;1;0)$$

1. Soit $(\mathcal{P})$ le plan passant par le point A et de vecteur normal : $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

Montrer que : $x+y-z-3=0$ est une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$.

2. Soit (S) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

Montrer que l'ensemble (S) est la sphère de centre $\Omega(-1;1;0)$ et de rayon $R=3$.

3. a. Calculer la distance du point Ω au plan $(\mathcal{P})$, et en déduire que le plan $(\mathcal{P})$ coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$.

3. b. Montrer que le point $H(0;2;-1)$ est le centre du cercle $(\mathcal{C})$.

3. c. Montrer que : $\overrightarrow{OH}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$,
puis en déduire l'aire du triangle OHB.

Exercice 22

On considère dans l'espace les quatre points suivants :

$$A(2;-1;0), B(1;1;-2), C(0;-1;3) \text{ et } \Omega(3;0;-1)$$

et (D) la droite passant par le point B et dirigée par le vecteur : $\vec{u}(2;-1;2)$,

et (S) la sphère de centre de centre Ω et de

rayon $R = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

et $(\mathcal{P})$ le plan défini par l'équation cartésienne :

$$(\mathcal{P}) : x + 2y + z - 1 = 0$$

1. a. Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 6\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}$.

1. b. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1. c. Calculer l'aire du triangle les points ABC.

1. d. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D).

2. b. Calculer la distance du point Ω à la droite (D).

2. c. En déduire que la droite (D) est tangente à la sphère (S).

3. a. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $(\mathcal{P})$.

3. b. En déduire que les deux plans (ABC) et $(\mathcal{P})$ se coupent suivant une droite (Δ).

3. c. Vérifier que : $C \in (\Delta)$.

3. d. En déduire une représentation paramétrique de la droite (Δ).

Exercice 23

On considère dans l'espace, la sphère (S) définie par l'équation cartésienne

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$$

et le plan $(\mathcal{P})$ défini par l'équation cartésienne

$$(\mathcal{P}) : y - z = 0.$$

et les trois points

$$A(1; 1; 1), B(3; 1; 0) \text{ et } C(1; 0; -2).$$

1. a. Déterminer le centre Ω et le rayon R de la sphère (S).

1. b. Calculer $d(\Omega; (\mathcal{P}))$, la distance du point Ω au plan $(\mathcal{P})$.

1. c. En déduire que le plan $(\mathcal{P})$ coupe la sphère (S) suivant un cercle $(\mathcal{C})$.

1. d. Déterminer le centre et le rayon du cercle $(\mathcal{C})$.

2. Soit (D) la droite passant par le point $A(1; -2; 2)$ et orthogonale au plan $(\mathcal{P})$.

2. a. Montrer que $\vec{u}(0; 1; -1)$ est un vecteur directeur de la droite (D).

2. b. Montrer que : $\| \overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} \| = \sqrt{2} \| \vec{u} \|$.

2. c. En déduire que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points.

2. d. Déterminer le triplet de coordonnées de chacun des points d'intersection de la droite (D) et la sphère (S).

Exercice 24

On considère dans l'espace l'ensemble

$$(S) = \{M(x; y; z) / x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0\}$$

et $(\mathcal{P})$ le plan défini par l'équation cartésienne

$$(\mathcal{P}) : 2x - 2y + z - 2 = 0$$

1. Montrer que l'ensemble (S) est une sphère de centre $\Omega(0; 2; 0)$ et le rayon $R = 3$.

2. Étudier la position relative de la sphère (S) et le plan $(\mathcal{P})$.

3. On considère la droite (D) définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et le plan $(\mathcal{P}_m)$ défini par l'équation :

$$2mx + (1 - 2m)y + (2m - 2)z = 0$$

où $m \in \mathbb{R}$.

3. a. Montrer que la droite (D) est incluse dans $(\mathcal{P}_m)$.

3. b. Déterminer la valeur de m pour laquelle le plan $(\mathcal{P}_m)$ est tangent à la sphère (S).