Exercice 1

Une urne contient 3 boules rouges, 2 boules vertes et une boule jaune.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard **successivement et avec remise** 2 boules de l'urne.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir deux boules rouges »

B : « Obtenir 2 boules jaunes »

C : « Obtenir 2 boules de même couleur »

D : « Obtenir 2 boules de couleurs différentes »

E : « Obtenir au moins une boule rouge »

F : « Obtenir au plus une boule verte »

Exercice 2

Un sac contient:

- 3 boules vertes numérotées : 1; 2; 3.
- 4 boules noires numérotées : 1; 2; 3; 4.
- 2 boules rouges numérotées : 1; 2.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard **successivement et sans remise** 3 boules du sac.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir 3 boules noires »

B : « Obtenir 3 boules de même couleur »

C : « Obtenir 3 boules qui portent le même numéro »

D : « Obtenir 3 nombres pairs »

E : « Obtenir au moins une boule noire »

F : « Obtenir une boule de chaque couleur »

G : « Obtenir deux boules vertes exactement »

H : « Obtenir une boule de chaque couleur et portant le même numéro »

I : « La somme des nombres obtenus est égale à 6 »

J : « Le produit des numéros obtenus vaut 12 »

Exercice 3

Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules rouges et 2 boules vertes.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire **simultanément** et au hasard 3 boules de l'urne

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir 3 boules rouges »

B : « Obtenir 3 boules de même couleur »

C : « Obtenir une boule de chaque couleur »

D : « Obtenir au moins une boule rouge »

E : « Obtenir au plus une boule rouge »

F : « Obtenir deux boules exactement de même couleur »

Exercice 4

Un sac contient 12 jetons répartis comme suit :

- 3 jetons blancs numérotés : 1; 1, 2
- 4 jetons rouges numérotés : 1; 1 ; 2; 2
- 5 jetons vertes numérotés : 1; 2; 2; 2; 3

Tous les jetons sont indiscernables au toucher.

On tire **simultanément** et au hasard 4 jetons du sac.

1. Déterminer le nombre de tirages possible.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir 4 jetons de même couleur »

B : « Obtenir un seul jeton rouge »

C : « Obtenir exactement deux jetons verts numérotés 2 »

D : « Obtenir 4 jetons portant le même numéro »

E : « Obtenir un seul jeton rouge et un seul nombre impair »

Exercice 5

Une urne contient 8 boules.

- 4 boules rouges numérotées : 1; 1; 2; 2.
- 4 boules vertes numérotées : 1; 1; 2; 2.

On tire **simultanément** au hasard 2 boules de l'urne.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

R : « Obtenir deux boules rouges »

R_1 : « Obtenir deux boules rouges sachant que l'une d'elles porte le numéro 2 »

V_1 : « Obtenir deux boules vertes sachant que l'une d'elles est verte et porte le numéro 1 »

Exercice 6

Une maladie atteint 1% d'une population donnée.

Un test de dépistage donne les résultats suivants:

- Chez les individus malades, 99% des tests sont positifs.
- Chez les individus non malades, 98% des tests sont négatifs.

On choisit au hasard un individu de cette population.

On considère les événements suivants :

T : « Le test est positif »

et M : « L'individu choisi est malade ».

1. Construire un arbre pondéré.
2. Calculer : $P(\overline{M})$, $P_M(\overline{T})$ et $P_{\overline{M}}(T)$.
3. Calculer : $P(T \cap M)$ et $P(\overline{M} \cap T)$ puis déduire $P(T)$.
4. Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que cet individu soit malade ?

Exercice 7

- Un sac S_1 contient 5 boules rouges et 3 boules noires.
- Un sac S_2 contient 2 boules rouges et une boule noire.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On choisit au hasard l'un des sac, puis on en tire au hasard une boule.

(il y a équiprobabilité dans le choix des sacs)

On considère les événements :

S_i : « Choisir le sac S_i » avec $i \in \{1; 2\}$.

R : « Obtenir une boule rouge »

N : « Obtenir une boule noire ».

1. Construire un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de choisir le sac S_2 et obtenir une boule rouge.
3. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge.
4. Sachant que la boule tirée est noire, quelle est la probabilité qu'elle soit tirée du sac S_1 ?

Exercice 8

Un sac contient 7 boules

- 4 boules rouges numérotées : 1; 1; 2; 3.
- 3 boules vertes numérotées : 1; 2; 3.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard **successivement et sans remise** 2 boules du sac.

On considère les événements suivants :

A : « Obtenir deux boules de même numéro »

B : « Obtenir 2 boules de couleurs différentes »

1. Calculer $P(A)$; $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. Sachant que l'événement B est réalisé, Calculer la probabilité d'obtenir deux boules portant le même numéro ?

Exercice 9

Un sac contient :

- 5 boules rouges numérotées : 0; 1; 1; 1; 2.
- 4 boules vertes numérotées : 0; 1; 1; 2.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire **simultanément** 3 boules de ce sac.

1. On considère les événements suivants :

A : « Obtenir 3 boules portant des numéros pairs »

B : « Obtenir 3 boules dont la somme des numéros est égale à 3 »

C : « Obtenir 3 boules vertes »

1. a. Montrer que : $P(A) = \frac{1}{21}$ et $P(B) = \frac{5}{14}$

1. b. Montrer que : $P(B \cap C) = \frac{1}{42}$

et en déduire que $P_B(C) = \frac{1}{15}$

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le produit des numéros obtenus.

2. a. Justifier que : $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 4\}$.

2. b. Montrer que : $P(X = 0) = \frac{7}{12}$

2. c. Calculer $P(X = 1)$, puis déterminer la loi de probabilité de X.

2. d. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 10

Un sac contient : 3 boules rouges, 4 boules noires et 3 boules blanches.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire **simultanément** 3 boules de ce sac.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir 3 boules de même couleur »

B : « Obtenir au moins une boule blanche »

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

2. a. Justifier que : $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$

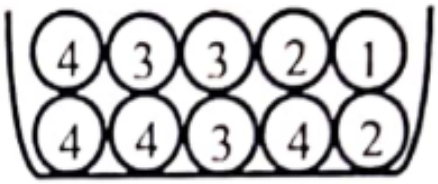
2. b. Déterminer la loi de probabilité de la variableX.

3. On répète l'épreuve précédente 4 fois de suite en remettant, dans l'urne, après chaque tirage, les boules tirées.

Calculer la probabilité pour que l'événement A soit réalisé exactement 3 fois.

Exercice 11

Une urne contient 10 boules portant les numéros : 1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4.



Ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard, **successivement et sans remise** deux boules de l'urne.

1. Soit l'événement :

A : « Obtenir deux boules portant deux numéros pairs »

Montrer que : $P(A) = \frac{1}{3}$

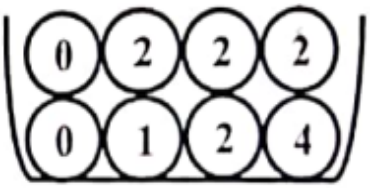
2. On répète l'expérience précédente trois fois de suite en remettant chaque fois les deux boules tirées dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réalisation de l'événement A.

Montrer que : $P(X = 1) = \frac{4}{9}$, puis déterminer la loi de probabilité de la variable X.

Exercice 12

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher portant chacune un numéro comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On tire **simultanément** 3 boules de cette urne.

1. Soient A et B les événements suivants :

A : « Parmi les trois boules tirées, aucun boule ne porte le numéro 0 »

B : « Le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égale à 8 »

Montrer que : $P(A) = \frac{5}{14}$ et $P(B) = \frac{1}{7}$

2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.

2. a. Montrer que : $P(X = 16) = \frac{3}{28}$

2. b. Le tableau ci-contre donne la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Recopier sur votre copie et compléter le tableau en justifiant chaque réponse.

x_i	0	4	8	16
$P(X = x_i)$				$\frac{3}{28}$

Exercice 13

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher :

- 5 boules rouges numérotées : 2; 2; 2; 1; 1.
- 4 boules blanches numérotées : 2; 2; 2; 1.

On considère l'expérience suivante :

On tire au hasard et **simultanément** 3 boules de l'urne.

Soit les évènements suivants :

A : « Les trois boules tirées ont le même couleur»

B : « Les trois boules tirées portent le même numéro »

C : « Les trois boules tirées portent le même numéro et ont le même couleur ».

1. Montrer que :

$$P(\text{A}) = \frac{1}{6} \text{ et } P(\text{B}) = \frac{1}{4} \text{ et } P(\text{C}) = \frac{1}{42}$$

2. On répète l'expérience précédente trois fois de suite en remettant les boules tirées dans l'urne après chaque tirage.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois de la réalisation de l'événement A.

2. a. Déterminer les paramètres de la variable aléatoire binomiale X.

2. b. Montrer que : $P(\text{X} = 1) = \frac{25}{72}$ puis calculer $P(\text{X} = 2)$.

Exercice 14

Une urne contient : 4 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

1. On tire au hasard et **simultanément** 3 boules de l'urne.

1. a. Calculer les probabilités des deux évènements :

A : « Les trois boules tirées ont la même couleur »

B : « Obtenir au moins une boule blanche »

1. b. Montrer que : $P_{\text{B}}(\text{A}) = \frac{2}{17}$

Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

2. On tire maintenant une boule de l'urne.

- Si cette boule est blanche, on la met de côté puis on tire une deuxième boule de l'urne.
- Si elle est noire, on la remet dans l'urne puis on tire une deuxième boule de l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage (des deux boules) associe le nombre de boules noires restantes dans l'urne.

2. a. Déterminer les valeurs prises par la variable X.

2. b. Montrer que : $P(\text{X} = 2) = \frac{23}{49}$

2. c. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. d. Calculer E(X) et V(X).

Exercice 15

Un sac contient 6 jetons indiscernables au toucher et numérotés : 1; 1; 1; 1; 2; 2.

On tire au hasard, **successivement et sans remise** 3 jetons du sac.

On considère les évènements suivants :

A : « La somme des numéros obtenus est égale à 3 »

B : « Le premier jetons porte le numéro 2 »

1. a. Montrer que : $P(\text{A}) = \frac{1}{5}$ et $P(\text{B}) = \frac{1}{3}$

1. b. Calculer $P_B(\text{A})$. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

2. Soit X la variable aléatoire associe à la somme des numéros portés par les trois jetons tirés.

2. a. Déterminer la loi de de probabilité de la variable X.

2. b. Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) puis l'écart type σ(X).

Exercice 16

Un sac contient :

- 5 boules blanches numérotées : 0; 0; 1; 1; 2.
- 3 boules rouges numérotées : 0; 1; 3.

Les boules sont indiscernables au toucher.

On tire **simultanément** 3 boules de ce sac.

1. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules blanches.

1. a. Déterminer la loi de probabilité de X.

1. b. Calculer l'espérance et la variance de X.

1. c. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche.

2. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées.

2. a. Justifier que : $\text{Y}(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 6\}$

2. b. Déterminer la loi de probabilité de Y.

2. c. Calculer l'espérance et l'écart-type de Y.

2. d. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Obtenir un produit supérieur ou égal à 2 »

B : « Obtenir un produit inférieur ou égal à 3 »

C : « Obtenir un produit compris strictement entre 1 et 5 ».

Exercice 17

Un sac contient :

- 6 boules blanches numérotées :
  0; 0; 0; 1; 1; 2
- 2 boules noires numérotées : 0; 1.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard **successivement et sans remise** 2 boules du sac.

On considère les événements suivants :

A : « Obtenir deux boules de même couleur »

B : « Obtenir 2 boules qui portent deux nombres pairs »

1. Montrer que : $P(A) = \frac{4}{7}$ et $P(B) = \frac{5}{14}$

2. Montrer que : $P(A \cap B) = \frac{3}{14}$

Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

3. On considère l'évènement :

C : « Les deux boules de même couleur ou elles portent deux nombres pairs ».

Montrer que : $P(C) = \frac{5}{7}$

4. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les deux boules tirées.

4. a. Justifier que : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.

4. b. Montrer que : $P(X = 0) = \frac{11}{14}$

4. c. Déterminer la loi de probabilité de X puis son espérance E(X) .

Exercice 18

Une boîte contient 8 cubes : un seul grand cube rouge, 3 petits cubes rouges, deux grands cubes verts, un petit cube vert et un petit cube jaune.

Un enfant choisit au hasard et **simultanément** 3 cubes de la boîte (on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et sa couleur)

1. Calculer la probabilité de chacun des évènements :

A : « Obtenir des cubes de couleurs différentes »

B : « Obtenir au plus un petit cube »

2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.

2. a. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. b. Calculer E(X) et V(X).

3. L'enfant répète n fois l'épreuve :
« Tirer simultanément 3 cubes de la boîte » en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant.

Les tirages sont indépendants.

On note p_n la probabilité que l'évènement B soit réalisé au moins une fois.

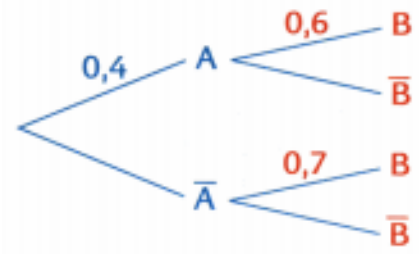
3. a. Déterminer p_n en fonction de n.

3. b. Déterminer le plus petit entier n vérifiant :

$$p_n \geq 0{,}99$$

Exercice 19

On donne l'arbre pondéré suivant :



1. Indiquez les probabilités manquantes.

2. Calculez : $p(A \cap B)$, $p(A \cap \overline{B})$, $p(\overline{A} \cap B)$, $p(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Exercice 20

Sur une machine, deux types de pannes sont possibles la panne d'origine mécanique et la panne d'origine électronique.

Un jour donné, la probabilité qu'une panne mécanique survienne est 0,005 et celle d'une panne électronique est 0,003.

D'autre part, la probabilité qu'une panne mécanique apparaisse sachant qu'une panne électronique a eu lieu ce jour-là est 0,002.

On notera **E** l'événement : « La machine a une panne électronique » et **M** l'événement : « La machine a une panne mécanique ».

1. Calculer la probabilité qu'une machine ait les deux types de pannes un jour donné.

2. Calculer la probabilité que la machine n'ait aucune panne un jour donné.

3. a. Calculer $P_{\overline{E}}(M)$.

3. b. Comparer $P_E(M)$ et $P_{\overline{E}}(M)$.
Interpréter cette comparaison.

Exercice 21

On lance 4 fois de suite une pièce équilibrée.

1. Dresser la liste des issues équiprobables.
2. Quel est l'événement le plus probable : A ou B ?

A : « 2 piles et 2 faces »

B : « 3 piles et 1 face »

Exercice 22

Une urne contient dix boules indiscernables, trois blanches et sept rouges.
On effectue quatre tirages successifs avec remise.

Quelle est la probabilité de chacun des événements :

A : « tirer deux boules blanches »

B : « tirer une seule boule blanche »

Exercice 23

Une étude statistique a montré que dans une série de 5 tirs au but, un joueur pris au hasard marque : 5 buts avec une probabilité de 0,2 ;
4 buts avec une probabilité de 0,5 ;
3 buts avec une probabilité de 0,3.

Chaque joueur, à l'entraînement, effectue deux séries de 5 tirs au but.
On admet que les résultats d'un joueur à chacune des deux séries sont indépendants.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de buts marqués au cours d'un entrainement.
2. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

Exercice 24

Un élève répond au hasard aux 10 questions d'un Q.C.M.

Pour chaque question, 5 réponses sont proposées dont une seule réponse est exacte.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

1. Montrer que la loi de probabilité de X est une loi binomiale.
2. Calculer la probabilité d'avoir au moins 5 bonnes réponses.
3. Calculer l'espérance mathématique du nombre de bonnes réponses.

Exercice 25

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

1. a. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes »

E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur »

1. b. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules, associe le nombre de boules bleues tirées.

Établir la loi de probabilité de X.

Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

On effectue ainsi k tirages successifs.

Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

Exercice 26

On écrit les entiers de 1 à 20 sur vingt cartons.
On tire au hasard un carton
Soient les événements suivants :

A : « on obtient un nombre impair »

B : « obtenir un multiple de 5 »

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ? et les événements A et B sont-ils incompatibles ?
2. Même question mais cette fois-ci on rajoute un carton numéroté 21.