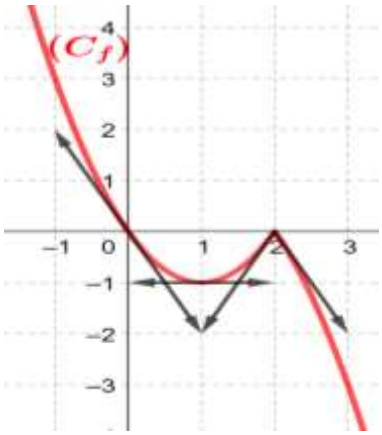
# Dérivation- Etude de fonctions

*Pr. Taher BOUYGUIR*

## *Exercice ① :*

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.




**1.** Donner $f'(1)$ et $f'(0)$.
**2.** La fonction $f$ est-elle dérivable en 2 ?
**3.** Déterminer $f'_g(2)$ et $f'_d(2)$.
**4.** Dresser le tableau de variations de $f$ en précisant le signe de $f'(x)$.
**5.** Dresser le tableau de signe de $f$.
**6.** Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 3$.

## *Exercice ② :*

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = x\sqrt{3-2x}$ et soit $(C_f)$ sa courbe representative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**1.** Donner $\mathfrak{D}_f$ le domaine de définition de $f$.
**2.** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
**3.** Etudier la dérivabilité de $f$ en $\frac{3}{2}$ à gauche. Interpréter graphiquement le résultat.
**4.** **a.** Montrer, pour tout $x \in \mathfrak{D}_f \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$, que : $f'(x) = \frac{3(1-x)}{\sqrt{3-2x}}$.
**b.** Étudier les variations de $f$.
**c.** Dresser le tableau de variations de $f$.
**5.** Soit $g$ la restriction de $f$ sur $]-\infty;1]$.
**a.** Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.
**b.** Etudier la dérivabilité de $g^{-1}$ sur $J$.
**c.** Calculer $(g^{-1})'(0)$.

## *Exercice ③ :*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2+1}$ et soit $(C_f)$ sa courbe representative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**1.** **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
**b.** Montrer que $(C_f)$ admet une asymptote oblique $(\Delta)$ à déterminer au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
**2.** **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
**b.** Montrer que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
**c.** Écrire une équation de la tangente $(T)$ à la courbe $(C_f)$ au point d'abscisse $-1$.
**3.** Donner les coordonnées des points d'intersection de $(C_f)$ avec les axes du repère.
**4.** Montrer que $(C_f)$ admet deux points d'inflexion à déterminer.
**5.** Construire $(\Delta)$, $(T)$ et $(C_f)$. (on prend $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1cm$, $\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0{,}6$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \simeq 1{,}8$ et $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \simeq 0{,}7$).
**6.** Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.
**7.** Montrer, pour tout $x \geq 0$, que $\frac{1}{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \frac{3}{2}$.
**8.** **a.** Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ definie sur un intervalle $J$ à déterminer.
**b.** Montrer que $f^{-1}$ est dérivable en 0 puis calculer $(f^{-1})'(0)$.
**c.** Tracer $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.

## *Exercice ④ :*

I. On considère $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

**1.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.
**2.** **a.** Montrer, pour tout réel $x$, que $g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
**b.** Donner le tableau des variations de $g$.
**c.** En déduire, pour tout réel $x$, que $g(x) > 0$.

II. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2+1}$, et soit $(C_f)$ sa courbe representative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**1.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
**2.** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. Interpréter géométriquement le résultat.
**3.** Montrer que la droite $(D): y = 2x - 1$ est une asymptote oblique de $(C_f)$ au voisinage de $+\infty$.
**4.** **a.** Montrer, pour tout réel $x$, que $f'(x) = g(x)$.
**b.** Dresser le tableau des variations de $f$.
**5.** Calculer $f(1)$ puis tracer $(C_f)$.
**6.** **a.** Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ definie sur un intervalle $J$ à déterminer.
**b.** Montrer que $f^{-1}$ est dérivable en $\sqrt{2}$ puis calculer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$.
**c.** Tracer $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.

## *Exercice ⑤ :*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \sqrt{x^2+2x}$, et soit $(C_f)$ sa courbe representative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**1.** Donner $D_f$ le domaine de définition de $f$.
**2.** **a.** Montrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de $(C_f)$.
**b.** En déduire $D_E$ le domaine d'étude de $f$.

**3.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**4.** Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

**5.** Montrer que la droite d'équation $y=-x$ est une asymptote oblique de $(C_f)$ au voisinage de $+\infty$.

**6. a.** Etudier les variations de $f$ sur $D_E$.

**b.** Dresser le tableau de variations de $f$ sur $D_f$.

**7. a.** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[0;+\infty[$.

**b.** Vérifier que $0<\alpha<1$.

**8.** Construire $(C_f)$.

**9.** Soit $g$ la restriction de $f$ sur $[0;+\infty[$.

**a.** Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

**b.** Calculer $g(1)$ .

**c.** Montrer que $g^{-1}$ est dérivable en $1-\sqrt{3}$ puis calculer $(g^{-1})'(1-\sqrt{3})$.

**d.** Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

## *Exercice ⑥ :*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+1$ et soit $(C_f)$ sa courbe representative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**1. a.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ .

**b.** Étudier les branches infinies de $(C_f)$ .

**2.** Montrer que le point $\Omega(1;-1)$ est un centre de symétrie de $(C_f)$.

**3. a.** Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ .

**b.** Étudier le signe de $f'(x)$.

**c.** Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**4.** Montrer que le point $\Omega$ est un point d'inflexion pour la courbe $(C_f)$.

**5. a.** Écrire une équation de la tangente $(T)$ à la courbe $(C_f)$ au point $\Omega$.

**b.** Calculer $g(3)$ puis racer $(C_f)$ .

**6.** Soit $g$ la restriction de $f$ sur $[2;+\infty[$.

**a.** Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

**b.** Montrer que $g^{-1}$est dérivable en 1 puis calculer $(g^{-1})'(1)$.

**c.** Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

## *Exercice ⑦ :*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\sqrt{2x-1}$ et soit $(C_f)$ sa courbe representative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

**1.** Donner $D_f$ le domaine de définition de $f$.

**2. a.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

**b.** Déterminer la nature de la branche infinie de $(C_f)$ au voisinage de $+\infty$.

**3.** Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en $\frac{1}{2}$. Interpréter graphiquement le résultat.

**4. a.** Montrer que $f$ est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

**b.** Montrer que le signe de $f'(x)$ sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ est le signe de $x-1$.

**c.** Dresser le tableau de variations de $f$ sur $D_f$.

**d.** Écrire une équation de la tangente $(T)$ à la courbe $(C_f)$ au point d'abscisse 5.

**5.** Construire $(C_f)$.

**6.** Soit $g$ la restriction de $f$ sur $[1;+\infty[$.

**a.** Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

**b.** Montrer que $g^{-1}$ est dérivable en 2 puis calculer $(g^{-1})'(2)$.

**c.** Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

**7. a.** Vérifier, pour tout $x\in[1;+\infty[$, que $g(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2$.

**b.** Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

## *Exercice ⑧ :*

Soient $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=sin\,(2x)$ et $(C_f)$ sa courbe d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\|=\frac{\pi}{4}$ et $\|\vec{\jmath}\|=1$.

**1.** Montrer que $f$ est périodique de période $\pi$.

**2.** Etudier la parité de $f$.

**3.** Vérifier que la droite $(\Delta)$: $x=\frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie de $(C_f)$.

**4.** Expliquer pourquoi il suffit d'étudier la fonction $f$ sur l'intervalle $I=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ?

**5. a.** Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in I$ .

**b.** Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $I$.

**6.** Construire $(C_f)$ sur $\left[\frac{-3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$.

## *Exercice ⑨ :*

Soit $f$ la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+3}{x+1}; & x\le 0\\ -\frac{\sqrt{x+1}}{x}; & x>0\end{cases}$.

**1. a.** Déterminer $D_f$ puis calculer les limites de $f$ aux bornes de $D_f$ .

**b.** Etudier les branches infinies de $(C_f)$.

**2.** $f$ est-elle continue en 0 ?

**3.** Etudier la dérivabilité de $f$ en 0, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

**4. a.** Calculer $f'(x)$ sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

**b.** Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**5.** Construire $(C_f)$.

***Pr. Taher BOUYGUIR***