Exercice 1

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative d'une fonction f est donnée ci-contre.

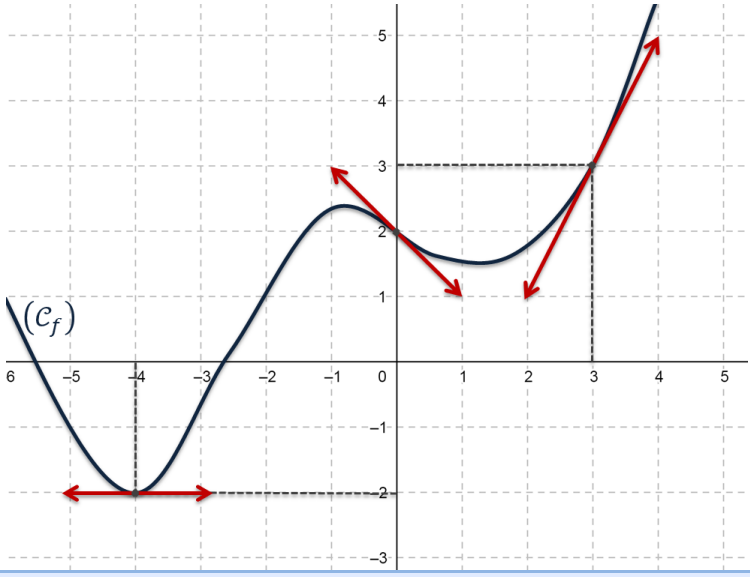
En chacun des points indiqués, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente qui est tracée.

En vous servant du quadrillage, compléter les égalités suivantes :

$f(0) =$; $f'(0) =$

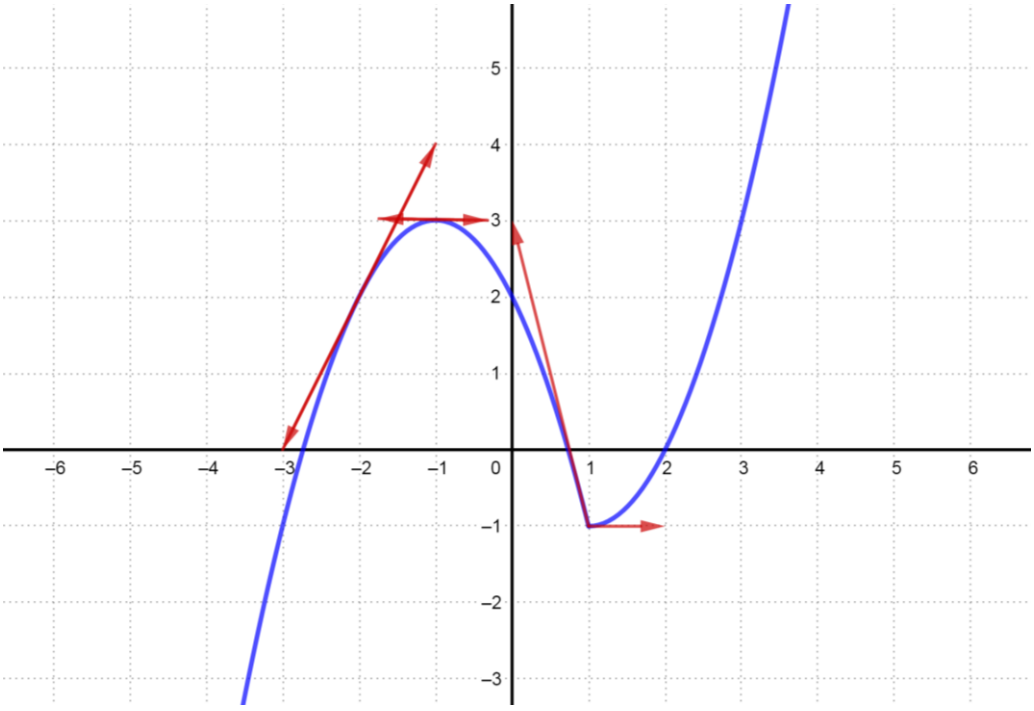
$f(3) =$; $f'(3) =$

$f(-4) =$; $f'(-4) =$



Exercice 2

La figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.



1. À l'aide du graphique déterminer : $f(-2)$, $f(-1)$, $f'(-2)$ et $f'(-1)$.

2. Donner une approximation de $f(-2{,}01)$.

3. Cocher la ou les bonnes réponses :

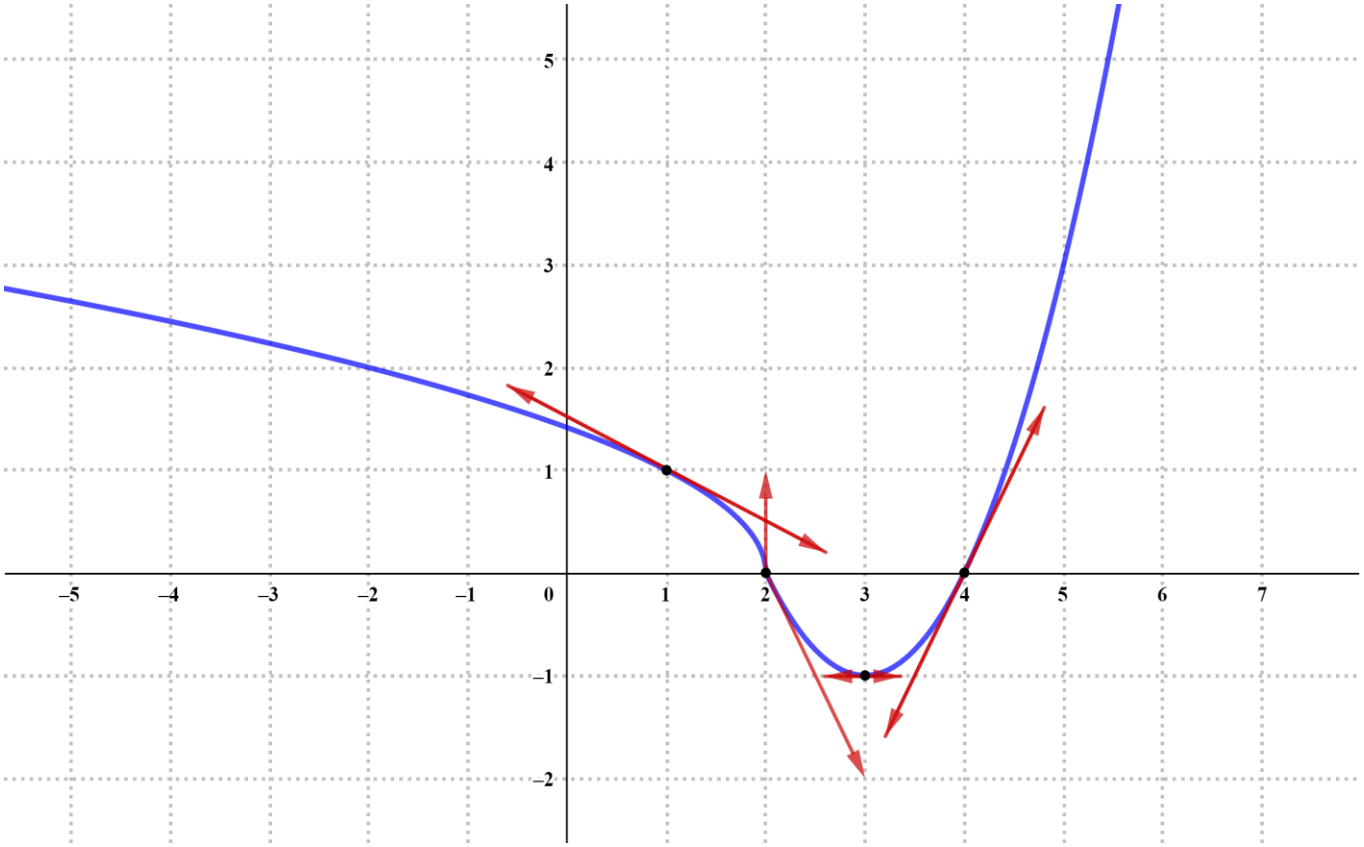
a. f est dérivable ❑ à droite en 1 ❑ à gauche en 1 ❑ en 1

b. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)+1}{x-1} =$ ❑ -4 ❑ -1 ❑ 1 ❑ 4

c. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)+1}{x-1} =$ ❑ $-\infty$ ❑ $+\infty$ ❑ 0 ❑ 1

Exercice 3

On a représenté la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé du plan.



Cocher la bonne réponse dans chacun des cas suivants :

1. La fonction f est dérivable sur :	❑ $\mathbb{R}-\{2\}$	❑ $\mathbb{R}-\{4\}$	❑ $\mathbb{R}$
2. La fonction f est dérivable en :	❑ 2	❑ 2^-	❑ 2^+
3. L'ensemble des solutions de l'équation $f'(x)=0$ est :	❑ $\mathcal{S}=\{3\}$	❑ $\mathcal{S}=\emptyset$	❑ $\mathcal{S}=\mathbb{R}$
4. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)}{x-2}=$	❑ $+\infty$	❑ 0	❑ $-\infty$
5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{x-4}=$	❑ $-\dfrac{1}{2}$	❑ 0	❑ 2
6. Le nombre dérivé de f en 1 est égale à	❑ $-\dfrac{1}{2}$	❑ 0	❑ 2

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=x\sqrt{x}$.

1. Montrer que f est dérivable à droite en 0, et déterminer $f'_d(0)$.

2. Vérifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

3. Préciser alors l'ensemble des réels x pour lesquels f est dérivable.

Exercice 5

Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\sqrt{x}$

1. Étudier la continuité de f sur $[0;+\infty[$.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 2 et à gauche en 0, puis interpréter les deux résultats graphiquement.

Exercice 7

On considère la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x)=|x^2-1|$.

1. Tracer dans un repère la parabole d'équation : $y=x^2-1$, et en déduire le tracé de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative de f.
2. Vérifier que f est une fonction paire.
3. Étudier la limite à droite en 1, puis la limite à gauche en 1 de $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$.
   La fonction f est-elle dérivable en 1 ?
4. Donner les équations des demi-tangentes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisse 1 et -1.
   Tracer ces demi tangentes

Exercice 8

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer la dérivée f' de f.
3. Trouver une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ de f au point d'abscisse 1.
4. Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T).
5. Que peut-on dire de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -1 ?
6. Déterminer à l'aide de (T) une valeur approchée de $f(1{,}02)$ puis de $f(0{,}96)$.

Exercice 9

Soit f la fonction trinôme telle que : $f(x)=ax^2+bx+c$.

Déterminer les réels a, b et c tels que sa courbe $(\mathcal{C}_f)$ admette au point $A(1;3)$ une tangente de coefficient directeur égal à 1 ainsi qu'une tangente horizontale au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 10

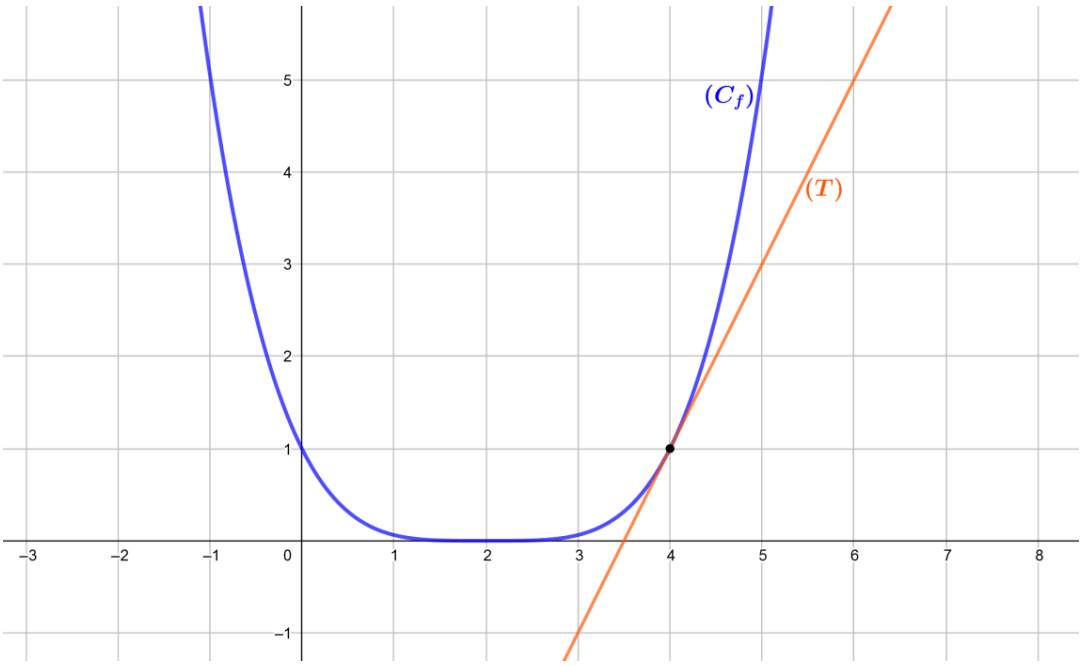
Sur le graphique ci-dessous sont représentées la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^4$$

ainsi que la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $a = 4$.

1. Donner, par lecture graphique, et sans justification, la valeur du nombre $f'(4)$.

2. Déterminer, à l'aide du calcul de la dérivée de f, la valeur du nombre $f'(3)$.



Exercice 11

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur $I =]1; +\infty[$.

1. a. Lire les valeurs de $f(2)$, $f(3)$ et $f(9)$.

b. Par lecture graphique, donner une valeur approchée des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

c. Déterminer le signe de f sur I.

2. a. Que vaut $f'(5)$? (Justifier)

b. Donner une équation de la droite (T). Quel nombre dérivé peut-on en déduire ?

c. Dresser le tableau de variations de f sur I.

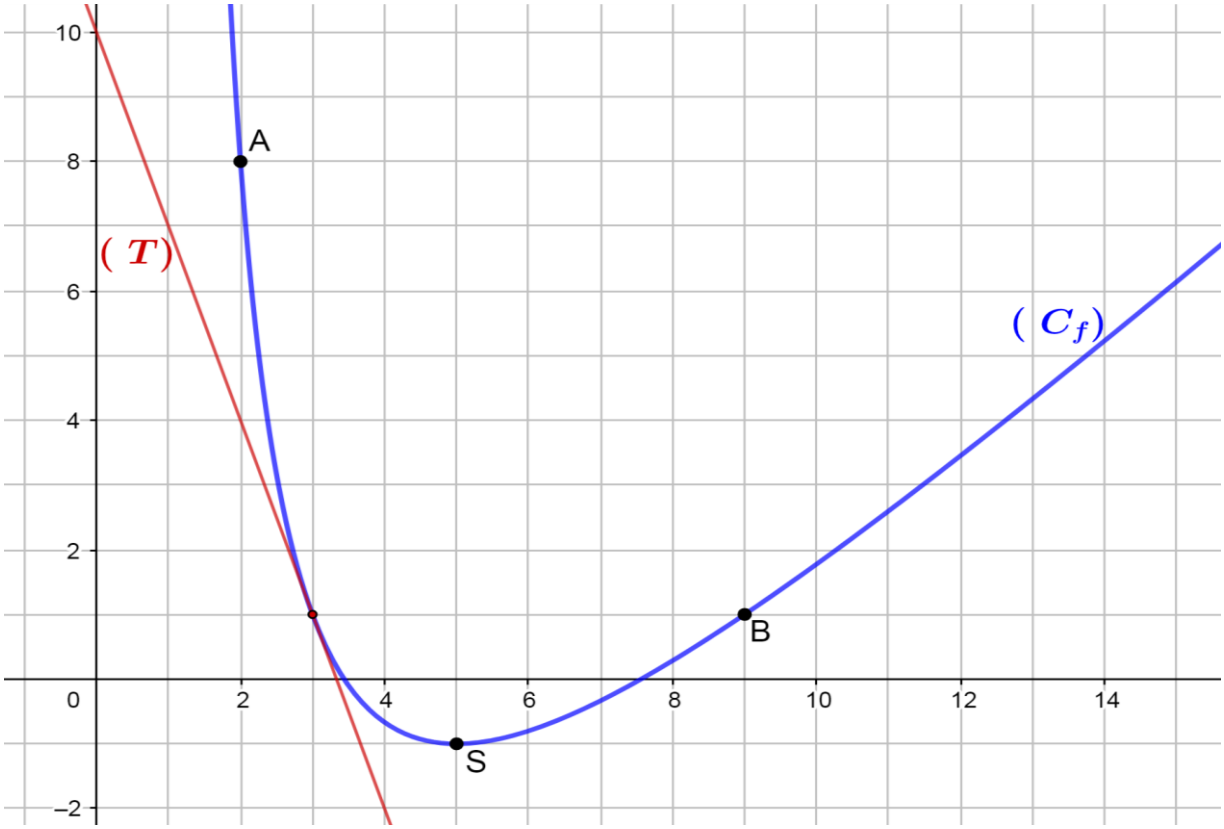
3. La fonction f est de la forme : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

a. Calculer $f'(x)$ en fonction de et de c .

b. Exprimer que A et B sont des point de $(\mathcal{C}_f)$ et qu'en S la tangente est horizontale.

c. En déduire un système d'inconnues a, b et c puis le résoudre pour trouver l'expression de $f(x)$.

4. Déterminer l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2.



Exercice 12

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 + 2\sqrt{3}x - 1; \qquad f(x) = (2x^2 + x)\sqrt{x}; \qquad f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{3x^2 + 1}; \qquad f(x) = \cos(3x); \qquad f(x) = (2x + 6)^4$$

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 - 4x + 8} & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x + 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C}_f)$, sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. Montrer que f est continue en 2 .

2. a. Montrer que f est dérivable à droite en 2 et que $f'_d(2) = 0$.

b. Montrer que f est dérivable à gauche en 2.

c. f est-elle dérivable en 2 ? Interpréter graphiquement le résultat.

3. a. Soit $x \in]-\infty; 2[$. Calculer $f'(x)$.

b. Existe-t-il des tangentes à $(\mathcal{C}_f)$, en les quels la tangente au points d'abscisse $a < 2$ soit parallèle à la droite $(\Delta) : (2 + \sqrt{2})x + 2y - 1 = 0$.

Exercice 14

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \longrightarrow 2x^4 - 3x^3 + \frac{x^2}{2} + 3$ sur $\mathbb{R}$.

2. Donner l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse -1.

Exercice 15

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant 0.
On note $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique.

1. Exprimer en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$ l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

On notera g la fonction affine correspondante à cette tangente.

2. Déterminer l'approximation affine g de la fonction f en 0 lorsque $f(x) = (1+x)^2$.

3. On note : $e(x) = |f(x) - g(x)|$ l'erreur de l'approximation.
Trouver une expression simple de $e(x)$.

4. Expliquer comment déterminer, sans calculatrice, une approximation de $1{,}0022^2$.
Quelle est l'erreur commise dans cette approximation ?

Exercice 16

1. Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

a) Calculer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ du polynôme P.

b) Déterminer les variations de P sur $\mathbb{R}$.

c) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in]-1; 0[$.

d) Donner un encadrement de α à 10^{-3}.

e) Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \dfrac{2}{x^2+1}$

a) Démontrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Déterminer la dérivée de f et montrer que : $f'(x) = \dfrac{(x+1).P(x)}{(x^2+1)^2}$.

c) À l'aide de la question **1.e)** déterminer le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 17

En utilisant le nombre dérivée, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0} \frac{(x+1)^{2021}-1}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{(x^2-1)^9-1}{x-\sqrt{2}} \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin x - \sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad \lim_{x\to1} \frac{x^2+\cos(\pi x)}{x-1}$$

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur son domaine de définition qu'on déterminera.

2. a. Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et en $\sqrt{2}$.

b. Calculer $(f^{-1})'(0)$ et $(f^{-1})'(\sqrt{2})$. (on remarque que : $f(0) = 0$ et $f(1) = \sqrt{2}$)

Exercice 19

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}-1}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, puis calculer les limites de f dans les extrémités de $\mathcal{D}_f$.

2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

3. Montrer que pour tout $x \in D_f - \{0\}$: $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2}$.

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [4; +\infty[$

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Montrer que g^{-1} est derivable en $\dfrac{9}{2}$, puis calculer $(g^{-1})'\left(\dfrac{9}{2}\right)$.

Exercice 20

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter graphiquement le résultat.

3. a. Montrer que pour tout $x \in]1; +\infty[$: $f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}(1+\sqrt{x-1})}$

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [2; +\infty[$

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Montrer que g^{-1} est derivable en 1, puis calculer $(g^{-1})'(1)$.

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0]$ par : $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty; 0]$.

2. a. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty; 0]$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 0]$.

b. En déduire que f est strictement décroissant sur $]-\infty; 0]$.

3. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

4. Calculer $f(-7)$ et $f'(-7)$, en déduire que f^{-1} est dérivable en 2, et déterminer $(f^{-1})'(2)$.

5. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 22

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x\sqrt[3]{x-2}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. Étude la dérivabilité de la fonction f à droite en 2, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3. a. Montrer que $\forall x \in]2;+\infty[: \ f'(x) = \dfrac{4x-6}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

b. Dresser le tableau de la variation de la fonction f.

4. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b. Montrer que f^{-1} est dérivable en 3, puis calculer $(f^{-1})'(3)$

Exercice 23

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f, et calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

2. a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)^2}{2\sqrt{x^2+4}}$

b. Dresser le tableau de variations de f.

3. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

4. Montrer que pour tout x de J : $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

5. Calculer $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 24

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{1-x^3} & ; \ x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x(x^2-1)} & ; \ x \geq 1 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en $a = 1$.

2. Étudier la dérivabilité de f au point $a = 1$. Interpréter le résultat obtenu.

3. a. Calculer $f'(x)$.

b. Donner le tableau de variations de la fonction f.

4. Soit g la restriction de la fonction f sur $I =]-\infty;1[$.

a. Montrer que g possède une fonction réciproque d'un intervalle J à préciser vers I.

b. Calculer $g(-1)$ et déduire la valeur de $(g^{-1})'\left(\sqrt[3]{2}\right)$.

c. Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.