## Exercice 1

Soit $f$ la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

1. Montrez que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et que $f$ est paire.
2. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interprétez graphiquement le résultat.
3. Calculez $f'(x)$ et dressez le tableau de variations de $f$.
4. Déterminez la tangente de $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.
5. Vérifiez que : $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) = \dfrac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$; et étudiez la convexité de $(\mathcal{C}_f)$.
6. Tracez $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
7. Soit $g$ la restriction de $f$ sur l'intervalle $= [0;+\infty[$ .
   a. Montrez que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.
   b. Montrez que $g^{-1}$ est dérivable en 0, et calculez $(g^{-1})'(0)$.
   c. Déterminez $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
   d. Tracez $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

## Exercice 2

Soit $f$ la fonction numérique définie par : $f(x) = 1 + \sqrt{x^2-2x}$.

1. Montrez que $\mathcal{D}_f = ]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$.
2. Montrez que la droite d'équation : $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
3. Montrez que la droite $(D)$: $y = x$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
4. Montrez que $f$ n'est pas dérivable à droite en 2. Interprétez graphiquement ce résultat.
5. a. Montrez que $f$ est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.
   b. Donnez le tableau de variations de $f$ sur $\mathcal{D}_f$.
6. Tracez $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
7. Soit $g$ la restriction de $f$ sur l'intervalle $I = [2;+\infty[$.
   a. Montrez que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.
   b. Donnez le tableau de variations de $g^{-1}$.
   c. Déterminez $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
   d. Tracez $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

## Exercice 3

1. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1.1. Étudiez la monotonie de la fonction $g$ et dressez son tableau de variations.

1.2. Montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $]2; 3[$.

1.3. Déduisez le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

1.4. Étudiez les branches infinies de $(\mathcal{C}_g)$.

1.5. Montrez que $\Omega(0; -3)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_g)$.

1.6. Déterminez la tangente de $(\mathcal{C}_g)$ en $\Omega$.

1.7. Tracez $(\mathcal{C}_g)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

2. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2}$.

2.1. Calculez les limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

2.2. Déterminez les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

2.3. Montrez que : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

2.4. Étudiez le signe de $f'(x)$ et déduisez-en le tableau de variations de $f$.

2.5. Étudiez la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ avec la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x$.

2.6. Montrez que : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f''(x) = \frac{3(2x+3)}{x^4}$ et étudiez la convexité de $(\mathcal{C}_f)$.

2.7. Tracez $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. On donne $\alpha \approx 2{,}1$ et $f(\alpha) \approx 3{,}8$.

## Exercice 4

1. $g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

a. Étudier les limites de $g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Étudier les variations de $g$ et dresser son tableau de variations.

c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $\mathbb{R}$.

d. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$.

2. $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$.

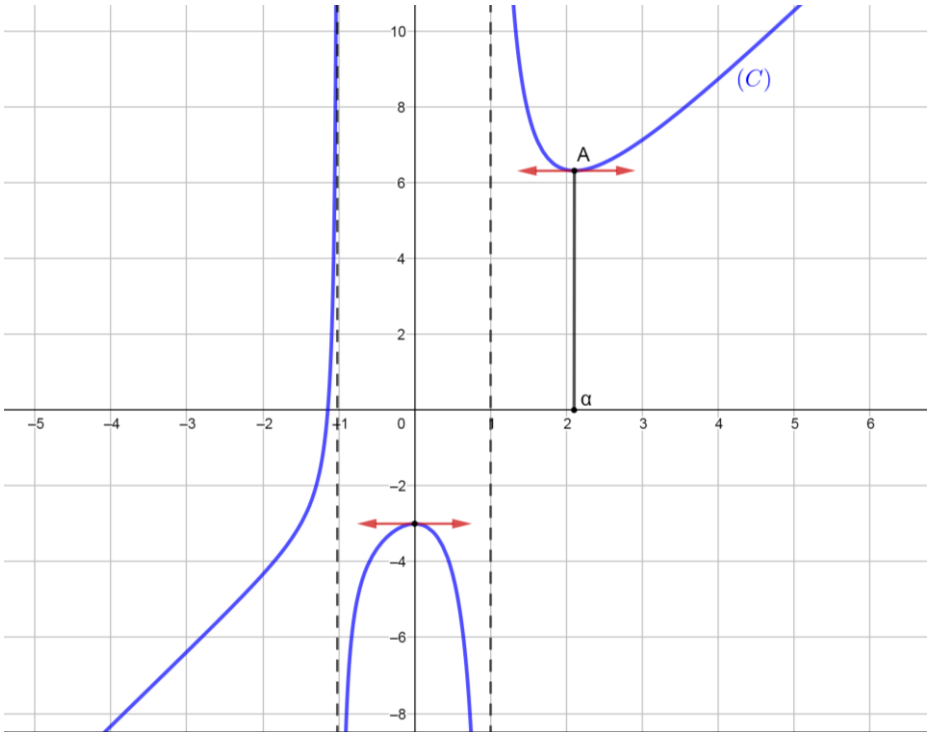
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ du plan.

a. Étudier les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes dont on donnera des équations.

b. Démontrer que, pour tout $x$ de $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ : $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

c. Dresser le tableau de variation de $f$.

d. On a tracé ci-dessous la courbe représentative de $f$.




Montrer que le point $A$ de $(\mathcal{C})$ d'abscisse α a pour ordonnée $f(\alpha) = \dfrac{3(2\alpha+3)}{\alpha^2-1}$.

## Exercice 5

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-2x}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ le tracé de la fonction $f$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. Déterminez $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de $f$.

2. a. Calculez les limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

   b. En déduire les équations des asymptotes de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3. a. Montrez que pour tout réel $x$ de $\mathcal{D}_f$ : $f'(x) = \dfrac{(x+1)(2-4x)}{(x^2-2x)^2}$.

   b. Donnez le tableau de variations de $f$.

   c. Donnez la nature des tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses $-1$ et $\frac{1}{2}$.

4. Tracez $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. ( $\|\vec{\imath}\| = 2cm$ et $\|\vec{\jmath}\| = 1cm$ )

   " *On admet que* $(\mathcal{C}_f)$ *admet un seul point d'inflexion de coordonnées :* $(-1{,}9;\ 1{,}1)$ "

5. Soit $g$ la restriction de la fonction $f$ sur l'intervalle $I = ]2;+\infty[$.

   a. Montrez que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur $I$.

   b. Donnez le tableau de variations de $g^{-1}$.

   c. Comparez $g^{-1}(3{,}1234)$ et $g^{-1}(3{,}1324)$ en justifiant votre réponse.

   d. Vérifiez que $g^{-1}\left(\frac{19}{3}\right) = 3$ et calculer $(g^{-1})'\left(\frac{19}{3}\right)$.

## Exercice 6

Soit $f$ la fonction numérique à variable réelle $x$ telle que : $f(x) = x\sqrt{x^2 - 2x}$ ,

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. ( unité $1cm$ )

1. a. Déterminez $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de $f$ et calculer les limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

   b. Montrez que $f$ est continue sur $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$.

   c. Étudiez la dérivabilité de la fonction $f$ à gauche en 0 et à droite en 2, et interprétez chaque résultat graphiquement.

2. a. Vérifiez que : $\forall x \in \mathcal{D}_f - \{0;2\} : f'(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

   b. Étudiez le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

3. a. Montrez que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

   b. Tracez soigneusement $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

4. Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I = ]-\infty;0]$.

   a. Montrez que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

   b. Dressez le tableau de variations de $g^{-1}$.

   c. Vérifiez que $g^{-1}(-\sqrt{3}) = -1$ et déduire $(g^{-1})'(-\sqrt{3})$.

## Exercice 7

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

et $(\mathcal{C}_f)$ le tracé de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. Montrez que $f$ est continue en 0.

2. a. Calculez les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. Montrez que la droite $(D): y = x + 1$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

3. Étudiez la dérivabilité de la fonction $f$ à gauche et à droite en 0, et interprétez chaque résultat graphiquement.

4. a. Vérifiez que : $\forall x \in ]0;+\infty[ : f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$.

   b. Vérifiez que : $\forall x \in ]-\infty;0[ : f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

   c. En déduire la monotonie de $f$ sur les intervalles $[0;+\infty[$ et $]-\infty;0]$.

5. Dressez le tableau de variations de $f$.

6. Déterminez l'équation réduite de la tangente $(T)$ de $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $-1$.

7. Tracez $(D)$, $(T)$ et $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

*" On admet que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse comprise entre : $-1$ et $0$ "*

8. Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I = ]-\infty;0[$.

a. Montrez que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

b. Tracez $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

c. Vérifiez que $g(-1) = \frac{1}{2}$ et déduire $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.

d. Déterminez $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

## Exercice 8

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x - 1 + 2\sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^3+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. ( unité $1cm$ ).

1. Montrez que $f$ est continue en 1.

2. a. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b. Étudiez les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3. Étudiez la dérivabilité de la fonction $f$ à gauche et à droite en 1, et interprétez chaque résultat graphiquement.

4. a. Montrez que $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

b. Vérifiez que : $\forall x \in ]-\infty;1[ : f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x}\cdot\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$.

c. En déduire la monotonie de $f$ sur les intervalles $]-\infty;0]$ et $[0;1]$.

d. Dressez le tableau de variations de $f$.

5. Calculez $f(-3)$ puis tracez soigneusement la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

6. Étudiez graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

## Exercice 9

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{2x-1} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = (1-x)\left(\sqrt{1-x}-2\right)^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. ( unité $1cm$ ).

1. Montrez que $f$ est continue en 1.

2. a. Calculez les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Montrez que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty$ et en déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction.

c. Calculez $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et en déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ dont on précisera la direction.

3. Étudiez la dérivabilité de la fonction $f$ à gauche et à droite en 1, et interprétez chaque résultat graphiquement.

4. a. Vérifiez que : $\forall x\in\,]1;+\infty[\,:\ f'(x)=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}\cdot\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$.

b. Vérifiez que : $\forall x\in\,]-\infty;1[\,:\ f'(x)=\dfrac{-2x(x+3)}{\left(\sqrt{1-x}+2\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}$.

c. En déduire la monotonie de $f$ sur les intervalles $[1;+\infty[$ et $]-\infty;1]$.

5. Dresser le tableau de variations de $f$.

6. Tracez la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

*" On admet que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse comprise entre : $-2$ et $-1$ "*

7. Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I=[1;+\infty[$.

a. Montrez que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.

b. Tracez $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

## Exercice 10

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x-2\sqrt{x}+1 & \text{si } x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}+1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. ( unité $1cm$ ).

1. a. Calculez les limites $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

b. Etudiez la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

c. Montrez que pour tout réel de $]-\infty;0[$ : $f(x)+x-1=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}$.

d. Montrez que la droite $(\Delta)$: $y=-x+1$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

e. Étudiez la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\Delta)$ sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

2. a. Montrez que $f$ est continue en 0.

b. Etudiez la dérivabilité de la fonction $f$ à gauche et à droite en 0, et interprétez chaque résultat graphiquement.

3. a. Vérifiez que pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ : $f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$.

b. Vérifiez que pour tout $x$ de $]-\infty;0[$ : $f'(x)=\dfrac{x(x^2+2)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

c. Étudiez les variations de la fonction $f$ et dresser son tableau de variations.

4. Tracez la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

*" On admet que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse comprise entre : $-2$ et $-1$ "*

5. Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $[1;+\infty[$.

a. Montrez que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle à déterminer.

b. Tracez $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

## Exercice 11

I) Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = 3x - 4x\sqrt{x} - \frac{1}{4}$.

1. Donner le tableau de variations de la fonction $h$ sur $\mathbb{R}^+$.

2. En déduire que pour tout $x$ de $\mathbb{R}^+$ : $h(x) \leq 0$.

II) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = (4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + \frac{1}{2}$.

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. ( unité $2cm$ ).

1. a. Calculez la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Etudiez la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

2. Etudiez la dérivabilité de $f$ à droite en 0, et interprétez ce résultat graphiquement.

3. a. Vérifiez que pour tout $x$ de $]0;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{2h(x)}{\sqrt{x}}$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

4. Montrez que $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$.

5. Tracez la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

*" On admet que $(\mathcal{C}_f)$ admet un seul point d'inflexion de coordonnées : $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ "*

6. Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.

a. Montrez que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle à déterminer.

b. Tracez $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

## Exercice 12

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = x + 3 - \sqrt{\frac{x}{x-2}}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. ( unité $1cm$ ).

1. Montrez que l'ensemble de définition de la fonction $f$ est : $\mathcal{D}_f = ]-\infty;0] \cup ]2;+\infty[$.

2. Calculez la limite $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ , et interprétez graphiquement ce résultat.

3. Calculez les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4. Montrez que la droite $(\Delta): y = x + 2$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

5. Précisez la position de $(\Delta)$ par rapport à $(\mathcal{C}_f)$ sur les intervalles $]-\infty; 0]$ et $]2; +\infty[$.

6. Etudiez la dérivabilité de $f$ à gauche en 0, et interprétez ce résultat graphiquement.

7. Vérifiez que pour tout $x$ de $\mathcal{D}_f - \{0\}$ : $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x-2)^2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}$.

8. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

9. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $]-3; -2[$.

10. Tracez la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

" *On admet que* $(\mathcal{C}_f)$ *coupe l'axe des abscisses en un autre point d'abscisse* $\beta$ *comprise entre :* 2 *et* $\frac{5}{2}$ "

11. Discutez suivant les valeurs de $m$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

12. Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $]2; +\infty[$.

a. Montrez que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle à déterminer.

b. Vérifiez que $g^{-1}(0) = \beta$ et montrez que : $(g^{-1})'(0) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(\beta-2)^2(\beta+3)}}$.

## Exercice 13

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. ( unité $1cm$ ).

1. a. Montrez que l'ensemble de définition de la fonction $f$ est : $\mathcal{D}_f = ]-\infty; 0] \cup ]1; +\infty[$.

b. Calculez les limites de $f$ aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

c. En déduire les équations des asymptotes de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

2. Etudiez la dérivabilité de $f$ à gauche en 0, et donnez une interprétation au résultat obtenu.

3. a. Prouvez que : $f'(x) = \dfrac{-1}{2(x-1)^2 \cdot \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}}$ pour tout $x$ de $]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

4. Tracez la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

5. Soit $g$ la restriction de $f$ à l'intervalle $]-\infty; 0]$.

a. Montrez que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $I$ à préciser.

b. Déterminez $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.

c. Tracez $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

## Exercice 14

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\sin x + \cos(2x)$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. Calculer $f(x+2\pi)$, conclure.
2. Calculer $f(\pi - x)$, conclure.
3. Justifier qu'il suffit d'étudier $f$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$ et dresser le tableau de variation de $f$ sur cet intervalle.
4. Donner une équation de la tangente $T$ à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.
5. Tracer $(\mathcal{C}_1)$ la courbe de la restriction de $f$ à l'intervalle $[-\pi;2\pi]$.

## Exercice 15

$f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin 3x - 3\sin x$.

1. Comparez $f(x+2\pi)$, $f(-x)$ et $f(\pi - x)$ à $f(x)$.
   Démontrez alors qu'il suffit d'étudier $f$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
2. Démontrez que pour tout réel $x$, $f'(x) = -6\sin x \sin 2x$.
3. Étudiez les variations de $f$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
4. Tracez la courbe de $f$ sur $[-2\pi;2\pi]$.

## Exercice 16

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Montrer que la droite $(D)$: $x = -\frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie à la courbe de $f$.
2. Montrer que le point $E\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ est un centre de symétrie à la courbe de $f$.
3. Étudier les variations de $f$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$ et construire $(\mathcal{C}_f)$.

## Exercice 17

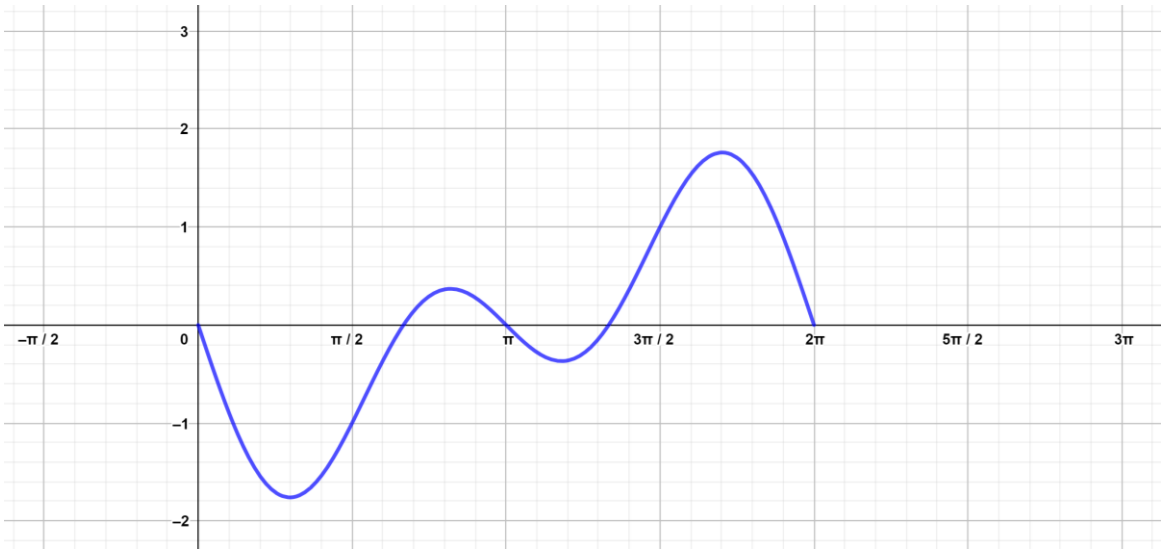
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2 x - 2\cos x - 1$.
On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. a. Montrez que $f$ est une fonction paire.
   b. Montrez que $2\pi$ est une période de $f$.
   c. Démontrez alors qu'il suffit d'étudier $f$ sur l'intervalle $I = [0;\pi]$.
2. a. Démontrez que pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = 2\sin x(\cos x + 1)$.
   b. Dresser le tableau de variation de $f$ sur $I$.
3. a. Démontrez que pour tout réel $x \in I$, $f''(x) = 4(\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$.
   b. Étudiez la convexité de $(\mathcal{C})$ sur $I$.
4. Déterminez les points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses sur $I$.
5. Tracez la courbe $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle $I$, puis sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$.

## Exercice 18

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0;2\pi]$ par : $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos(2x)+1$.

La courbe préconstruite ci-dessous est la représentation graphique de la fonction dérivée $f'$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$.




1. a. Déterminer la fonction dérivée $f'$ de la fonction $f$.

   b. En utilisant la relation : $\mathbf{sin(2a)=2\sin a\cos a}$, montrer que, pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0;2\pi]$ : $f'(x)=-\sin x\,(1+2\cos x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0;2\pi]$, l'équation : $\sin x\,(1+2\cos x)=0$.

3. a. En s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction dérivée $f'$ ci-dessus, dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

   b. Déduire des questions **2.** et **3. a)** le tableau de variations de la fonction $f$ sur $[0;2\pi]$. Préciser les ordonnées des points dont l'abscisse $x$ vérifie $f'(x)=0$.

4. Tracer la courbe représentative de $f$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$ dans le repère précédent (où $f'$ est déjà représentée).

## Exercice 19

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]-\pi;\pi[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos x-\sin x}{\sin x} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. Montrer que $f$ est continue et dérivable en 0.
2. Montrer que $f$ est dérivable sur $]-\pi;\pi[$ et que $f'(x)=\dfrac{1}{1+\cos x}$.
3. Dresser le tableau de variation de $f$ sur $]-\pi;\pi[$.
4. Montrer que $\Omega(0;-1)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C})$ puis écrire une équation de la tangente $T$ à $(\mathcal{C})$ en $\Omega$.
5. Tracer $T$ et $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.