Exercice 1

Calculer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1) $u_n = 3n^5 - 7n^2 - 2$ 2) $u_n = -n^4 + 3n^2 - 5$

3) $u_n = \dfrac{n - 2n^2 + 1}{1 + n^2}$ 4) $u_n = \dfrac{n^2 - n + 7}{2n^3 + 7n^2 - 6}$

5) $u_n = \dfrac{\sqrt{n} - 2}{4\sqrt{n} + 2}$ 6) $u_n = \dfrac{n - 7}{\sqrt{n}}$

7) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ 8) $u_n = \sqrt{2n} - \sqrt{n+1}$

9) $u_n = 2^n + 7^{-n}$ 10) $u_n = 2^n - 7^n$

11) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{5^n + 3}$ 12) $u_n = (0{,}2)^n \dfrac{2n - 7}{n + 4}$

Exercice 2

(u_n) est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n = 4^n - 2^n$$

1. Montrer que : $4^n \geq 2 \times 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire que : $u_n \geq 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 3

(u_n) est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ u_n = \frac{(-1)^n - 4n}{n}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ -\frac{1}{n} \leq u_n + 4 \leq \frac{1}{n}$.
2. Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 4

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = u_n^2 + 1$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n > 0$.
2. Montrer que (u_n) est strictement croissante.
3. Montrer que : $\forall n \geq 4 : \ u_n \geq 2^n$.
4. Que pouvez-vous en déduire quant à la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice 5

(u_n) est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n = 3\sqrt{n} + \frac{5n + 1}{2^n + 3}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n \geq 3\sqrt{n}$.
2. En déduire que la suite (u_n) est divergente.

Exercice 6

(u_n) est la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$$

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq -6$$

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire qu'elle est convergente.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n + 6$.

3. a- Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

3. b- Déterminer le terme général de (v_n).

3. c- En déduire u_n en fonction de n et calculer $\lim u_n$.

Exercice 7

(u_n) est la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{9}$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > \frac{2}{3}$

2. a- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. b- En déduire que (u_n) est convergente.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

3. a- Déterminer le premier terme la suite (v_n).

3. b- Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

3. c- Déterminer le terme général de (v_n).

3. d- En déduire u_n en fonction de n.

3. e- Calculer $\lim u_n$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

4. a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{2}{3}n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

4. b- Calculer $\lim S_n$.

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$

2. a- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. b- En déduire que (u_n) est convergente.

3. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

3. a- Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$.

3. b- Déterminer v_n en fonction de n.

4. a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{15+4n}{3+4n}$.

4. b- En déduire $\lim u_n$.

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{4u_n + 8}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n > -\frac{1}{2}$$

2. a- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. b- En déduire que (u_n) est convergente.

3. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{2}{1 + 2u_n}$

3. a- Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{2}{3}$.

3. b- Déterminer le terme général de (v_n).

4. a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{2-v_n}{2v_n}$, et en déduire u_n en fonction de n.

4. b- Calculer $\lim u_n$.

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - u_n}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 2$$

2. a- Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n - 2)}{1 + (2 - u_n)}$$

2. b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. c- En déduire que (u_n) est convergente.

3. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n}$

3. a- Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 3$.

3. b- Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

3. c- En déduire $\lim u_n$.

Exercice 11

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 100 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 10}$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 0$

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3. a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} < \frac{1}{10} u_n$.

3. b- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n < 100 \left(\frac{1}{10}\right)^n$.

3. c- Calculer $\lim u_n$.

Exercice 12

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 3 \leq u_n \leq 4$$

2. Étudier la monotonie de la suite (u_n) et déduire qu'elle est convergente.

3. a- Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

3. b- En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

3. c- Déterminer $\lim u_n$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$

4. a- Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

4. b- Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

4. c- Déterminer de nouveau $\lim u_n$.

5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$
$$T_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

5. a- Calculer S_n en fonction de n.

5. b- Déterminer $\lim S_n$ et $\lim T_n$.

Exercice 13

Partie 1 : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$$

1. Déterminer $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
3. Pour tout x de $\mathcal{D}$, calculer $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variations de f.

Partie 2 : Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 3$
2. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim u_n$.

Exercice 14

Partie 1 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x}$$

1. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations.
2. Déterminer les points d'intersections de la courbe représentative de f et la droite (Δ) d'équation $y = x$.
3. Montrer que : $\forall x \in]1; 4[: f(x) > x$.

Partie 2 : Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 < u_n < 4$$

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Calculer $\lim u_n$.

Exercice 15

Partie 1 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \sqrt{2x + 8}$$

1. Étudier les variations de f.
2. Étudier la position relative de la courbe représentative de f et la droite $(\Delta) : y = x$.

Partie 2 : Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 4$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 16

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

1. a- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$:

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

1. b- En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \leq x$
3. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$$

3. a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 1$
3. b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante
3. c- En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim u_n$.

Exercice 17

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = 8u_{n+1} - 7u_n \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_{n+1} - u_n$$

1. Calculer u_2 ; u_3 et v_2 .
2. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3. Déterminer le terme général de (v_n).
4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}$$

4. a- Calculer la somme S_n en fonction de n..
4. b- Déduire le terme général de (u_n) en fonction de n.

Exercice 18

La suite (u_n) est définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

1. Calculer les trois premiers termes de (u_n).

2. Démontrer que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

3. En déduire la convergence de la suite (u_n).
Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 19

1. Démontrez que la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}$$

est convergente. Précisez sa limite.

2. Démontrez que la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ v_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2^n}$$

est convergente. Précisez sa limite.

Exercice 20

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{n}{3^n}$.

1. a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{2}{3}$$

1. b- En déduire que (u_n) est décroissante.

1. c- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_n \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

1. d- Déterminer $\lim u_n$.

2. Soit $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

2. a- Montrer que (S_n) est croissante.

2. b- Montrer que (S_n) est majorée par 2.

Exercice 21

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = 1 + \sqrt{1+u_n^2}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n > 1$.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n \geq n$.

4. En déduire $\lim u_n$.

Exercice 22

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 < u_n < 2$$

2. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$2 - u_{n+1} < \frac{1}{2}(2 - u_n)$$

2. b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 < 2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

2. c. Déterminer $\lim u_n$.

3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$$

3. b. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 23

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1)$$

et (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n + n - 1$$

1. a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

1. b. Déterminer v_n en fonction de n.

1. c. En déduire u_n en fonction de n.

1. d. Déterminer $\lim u_n$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose :

$$T_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

2. a. Montrer que : $T_n = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right)$.

2. b. Montrer que : $S_n = T_n + \frac{(n+1)(2-n)}{2}$.

2. c. Déterminer $\lim S_n$.