## Exercice 1

Soient $F$ et $G$ deux fonctions définies par :

$$F(x)=\frac{1}{x^2+1} \text{ et } G(x)=\frac{5+3x^2}{2(x^2+1)}$$

Montrer que $F$ et $G$ sont deux fonctions primitives de la même fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 2

Soient $F$ et $G$ deux fonctions définies par :

$$F(x)=\frac{x^2+5x-9}{x-2} \text{ et } G(x)=\frac{x^2+x-1}{x-2}$$

Montrer que $F$ et $G$ sont deux fonctions primitives de la même fonction $f$ sur $]2;+\infty[$.

## Exercice 3

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=3x-1+\frac{2}{x^2}$

Déterminer la primitive $F$ de $f$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 2.

## Exercice 4

On considère deux fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x(x^2+1)^3$ et $g(x)=\frac{x^3}{(x^4+2)^2}$

1. Montrer que la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\frac{1}{8}(x^2+1)^4$ est une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$

2. Montrer que la fonction $G$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x)=\frac{-1}{4(x^4+2)}$ est une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}$

3. En déduire une des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $3f+2g$.

4. Déterminer la fonction primitive $L$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la condition $L(0)=2$.

5. Déterminer la fonction primitive $K$ de $g$ sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la condition $K(1)=2$.

## Exercice 5

On considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x)=(x-4)\sqrt{3-x}$$

1. Montrer que le domaine de définition de la fonction $f$ est : $\mathcal{D}=]-\infty;3]$.

2. Montrer que $\forall x\in]-\infty;3[ : f'(x)=\frac{10-3x}{2\sqrt{3-x}}$

3. En déduire les primitives de la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]-\infty;3[$ par :

$$g(x)=\frac{10-3x}{\sqrt{3-x}}$$

## Exercice 6

On considère la fonction $f$ définie par :

$$f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x}}$$

1. Montrer que le domaine de définition de la fonction $f$ est : $\mathcal{D}=]0;+\infty[$.

2. Montrer que $\forall x\in\mathcal{D} : f'(x)=\frac{2x-1}{2x\sqrt{x}}$

3. Déterminer la fonction primitive $G$ de la fonction $g$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{2x-1}{x\sqrt{x}}$ et qui vérifie $G(1)=2$

## Exercice 7

Soit $g$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$g(x)=x\sqrt{x}$$

1. Calculez la dérivée de $g$ sur $]0;+\infty[$ .

2. Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\sqrt{x}$$

Déduisez de la première question une primitive de $f$ sur $]0;+\infty[$.

## Exercice 8

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2x^3-4x^2+2x-3}{(x-1)^2}$

1. Vérifier que pour tout $x$ de $]1;+\infty[$ :

$$f(x)=2x-\frac{3}{(x-1)^2}$$

2. En déduire la primitive $F$ de la fonction $f$ qui vérifie $F(2)=-1$.

## Exercice 9

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]-3;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2x^3+13x^2+24x+2}{(x+3)^2}$

1. Déterminer les réels $a$; $b$ et $c$ tels que, pour tout $x\neq -3$ : $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+3)^2}$

2. En déduire une primitive $F$ de $f$ sur $]-3;+\infty[$.

## Exercice 10

On considère la fonction $f$ définie sur $]0;1[$ par :

$$f(x)=\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$$

1. Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que :

$$f(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(x-1)^2} \text{ pour tout } x \text{ de } ]0;1[$$

2. En déduire la primitive $F$ de $f$ sur $]0;1[$ vérifiant la condition $F\left(\frac{1}{2}\right)=6$.

## Exercice 11

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^4}$

1. Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que, pour tout $x\neq -1$ : $f(x)=\frac{a}{(x+1)^3}+\frac{b}{(x+1)^4}$

2. En déduire une primitive $F$ de $f$ sur $]-1;+\infty[$.

## Exercice 12

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x)=\frac{3x+4}{(x+1)^3}$

1. Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que, pour tout $x\neq -1$ : $f(x)=\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{(x+1)^3}$

2. En déduire une primitive $F$ de $f$ sur $]-1;+\infty[$.

## Exercice 13

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x)=\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$

1. Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que, pour tout $x$ de $]1;+\infty[$ : $f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x+1)^2}$

2. En déduire une primitive $F$ de $f$ sur $]1;+\infty[$.

## Exercice 14

Soit la fonction $f$ définie par : $f(x)=\frac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$

1. Montrer que, pour tout $x$ de $]1;+\infty[$ :

$$f(x)=\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{1}{2(x+1)^3}$$

2. En déduire une primitive $F$ de $f$ sur $]1;+\infty[$.

## Exercice 15

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x)=x+1$ ; $f_2(x)=3x^2-4x$

$f_3(x)=x^2+2x-1$ ; $f_4(x)=x^4-4x^3+x^2$

$f_5(x)=3x^2-x+2$ ; $f_6(x)=5x^7-3x^4+5$

$f_7(x)=2x^3(x-4)$ ; $f_8(x)=\frac{x^2-2x+6}{3}$

## Exercice 16

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x)=-\frac{3}{x^2}$; $f_2(x)=\frac{2}{x^3}$

$f_3(x)=\frac{1}{x^5}$; $f_4(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{4}{x^5}$

$f_5(x)=\frac{7}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^3}$; $f_6(x)=\frac{3x^2+1}{x^4}$

$f_7(x)=\frac{2(x^4-1)}{x^3}$; $f_8(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

## Exercice 17

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x)=(x+3)^2$; $f_2(x)=2x(1+x^2)^3$

$f_3(x)=x^2(x^3-5)^8$; $f_4(x)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}-1\right)^3$

$f_5(x)=x^2\sin(1+x^3)$ ; $f_6(x)=\sin x\,.\cos x$

$f_7(x)=\sin(2x-1)\,.\cos^4(2x-1)$

$f_8(x)=\frac{1+\tan x}{\cos^2 x}$; $f_9(x)=x(x+1)^{2022}$

## Exercice 18

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x)=\frac{1}{(x+3)^2}$; $f_2(x)=\frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}$

$f_3(x)=\frac{3}{(2x-5)^7}$; $f_4(x)=\frac{x-1}{(x^2-2x-3)^5}$

$f_5(x)=\frac{4x^2}{(x^3-8)^3}$; $f_6(x)=\frac{3x^2-7x}{(2x^3-7x^2+9)^6}$

$f_7(x)=\frac{\sin x}{(1+\cos x)^3}$

## Exercice 19

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ ; $f_2(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

$f_3(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ ; $f_4(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f_5(x)=\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^3-3x^2}}$ ; $f_6(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

$f_7(x)=x\sqrt{x^2+1}$ ; $f_8(x)=\dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{1+3x}{x}}$

$f_9(x)=\sqrt[3]{x+1}$ ; $f_{10}(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+6}}$

$f_{11}(x)=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ; $f_{12}(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$

## Exercice 20

Soit $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=\cos x\,.\cos(3x)$ et $g(x)=\sin x\,.\sin(3x)$

1. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions $f+g$ et $f-g$.
2. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions $f$ et $g$.

## Exercice 21

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x\sin x$$

1. Montrer que $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel $x$,

$$f(x)=2\cos x-f''(x)$$

2. En déduire la primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\pi$.

## Exercice 22

Soit les fonctions $f:x\mapsto x\cos x$ et $g:x\mapsto x\sin x$

1. En calculant $f'(x)+g(x)$, trouver une primitive $G$ de $g$ sur $\mathbb{R}$.
2. En procédant de même, déterminer une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 23

Soit $f$ la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x^2+2}{(x+1)^4}$$

On se propose de déterminer des réels $a, b, c$ et $d$ tels que pour tout $x$ de $]-1;+\infty[$,

$$f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}+\frac{d}{(x+1)^4}$$

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)^4 f(x)$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)f(x)$

1. b. En déduire que $d=3$ et $a=0$.

2. a. Vérifier que pour tout réel $x$ de $]-1;+\infty[$,

$$\frac{x-1-c}{(x+1)^3}=\frac{b}{(x+1)^2}$$

2. b. En déduire les valeurs des réels $b$ et $c$.

3. Déterminer la primitive de $f$ sur $]-1;+\infty[$ égale 2 en 0.

## Exercice 24

On considère la fonction $f$ définie sur $[0\,;1]$ par

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}$$

Soit $F$ la primitive de $f$ sur $[0;1]$ qui s'annule en 0, et $g$ la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par

$$g(x)=F(\cos x)$$

1. Montrer que $g$ est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée.

2. En déduire que pour tout $x$ de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$$g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{\pi}{4}$$

3. Calculer $F(1)$ et $F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

## Exercice 25

Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivable sur $I$ telles que :

1. $f''(x)=0$ ; $I=\mathbb{R}$
2. $f''(x)=\sin x$ ; $I=\mathbb{R}$

## Exercice 26

Soit $u$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$

1. Exprimer $\sqrt{x^2+1}$ à l'aide de $u(x)$ et $u'(x)$
2. Déterminer des primitives pour chacune des fonctions ci-dessous.

$$f : x \mapsto \frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$$g : x \mapsto \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

## Exercice 27

Pour tout entier naturel $n$ supérieur à 2, on considère la fonction $P_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

1. Déterminer la primitive $F_n$ de $P_n$ sur $\mathbb{R}$ égale à 1 en 0.
2. Déduire une autre expression de $P_n(x)$

# Indications aux solutions

### Exercice 1 et 2

Montrer que $F - G$ est une constante réelle.

### Exercice 3

On trouve : $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{2}{x} - 3$

### Exercice 4

1. On montre que : $\forall x \in \mathbb{R} : F'(x) = f(x)$
2. On montre que : $\forall x \in \mathbb{R} : G'(x) = g(x)$
3. $3F + 2G$
4. On trouve : $\forall x \in \mathbb{R} : L(x) = \frac{1}{8}(x^2+1)^4 + \frac{15}{8}$
5. On trouve : $\forall x \in \mathbb{R} : K(x) = \frac{-1}{4(x^4+2)} + \frac{25}{12}$

### Exercice 5

3. On trouve : $\forall x \in ]-\infty ; 3[$ :

$$G(x) = \frac{1}{2}(x-4)\sqrt{3-x} + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

### Exercice 6

3. On trouve : $\forall x \in ]0;+\infty[$ :

$$G(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

### Exercice 7

1. On trouve : $\forall x \in ]0;+\infty[ : g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
2. On trouve : $\forall x \in ]0;+\infty[ : F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

### Exercice 8

2. On trouve : $\forall x \in ]1;+\infty[ : F(x) = x^2 + \frac{3}{x-1} - 8$

### Exercice 9

1. On trouve : $a = 2; b = 1$ et $c = -7$
2. On trouve : $\forall x \in ]-3;+\infty[ : F(x) = x^2 + x + \frac{7}{x+3}$

### Exercice 10

1. On trouve : $a = -1$ et $b = 1$
2. On trouve : $\forall x \in ]-3;+\infty[$ :

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + 2$$

### Exercice 11

1. On trouve : $a = 1$ et $b = 1$
2. On trouve : $\forall x \in ]-1;+\infty[$ :

$$F(x) = \frac{-1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)^3}$$

### Exercice 12

1. On trouve : $a = 3$ et $b = 1$
2. On trouve : $\forall x \in ]-1;+\infty[$ :

$$F(x) = \frac{-3}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2}$$

### Exercice 13

1. On trouve : $a = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{1}{4}$
2. On trouve : $\forall x \in ]-1;+\infty[$ :

$$F(x) = \frac{-3}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)^2}$$

### Exercice 14

2. On trouve : $\forall x \in ]-1;+\infty[$ :

$$F(x) = \frac{-1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)^2}$$

### Exercice 15

$F_1(x)=\frac{1}{2}x^2+x$ ; $F_2(x)=x^3-2x^2$

$F_3(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-x$ ; $F_4(x)=\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{1}{3}x^3$

$F_5(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+2x$; $F_6(x)=\frac{5}{8}x^8-\frac{3}{5}x^5+5x$

$F_7(x)=\frac{2}{5}x^5-2x^4$ ; $F_8(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2+2x$

### Exercice 16

$F_1(x)=\frac{3}{x}$; $F_2(x)=-\frac{1}{x^2}$

$F_3(x)=-\frac{1}{4x^4}$; $F_4(x)=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^4}$

$F_5(x)=-\frac{7}{x}-\sqrt{x}-\frac{1}{2x^2}$; $F_6(x)=-\frac{3}{x}-\frac{1}{3x^3}$

$F_7(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$; $F_8(x)=\frac{1}{3x^3}+2x-\frac{1}{x}$

### Exercice 17

$F_1(x)=\frac{1}{3}(x+3)^3$; $F_2(x)=\frac{1}{4}(1+x^2)^4$

$F_3(x)=\frac{1}{27}(x^3-5)^9$; $F_4(x)=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}-1\right)^4$

$F_5(x)=-\frac{1}{3}\cos(1+x^3)$; $F_6(x)=-\frac{1}{2}\cos^2 x$

$F_7(x)=-\frac{1}{10}\cos^5(2x-1)$; $F_8(x)=\frac{1}{2}(1+\tan x)^2$

$F_9(x)=\frac{1}{2024}(x+1)^{2024}-\frac{1}{2023}(x+1)^{2023}$

### Exercice 18

$F_1(x)=\frac{-1}{x+3}$; $F_2(x)=\frac{-1}{x^2-x+3}$

$F_3(x)=\frac{-1}{4(2x-5)^6}$; $F_4(x)=\frac{-1}{8(x^2-2x-3)^4}$

$F_5(x)=\frac{-2}{3(x^3-8)^2}$; $F_6(x)=\frac{-1}{10(2x^3-7x^2+9)^5}$

$F_7(x)=\frac{1}{2(1+\cos x)^2}$

### Exercice 19

$F_1(x)=4\sqrt{x}$; $F_2(x)=-2\sqrt{1-x}$

$F_3(x)=\sqrt{x^2+3}$; $F_4(x)=-3\sqrt{1-x^2}$

$F_5(x)=\frac{2}{3}\sqrt{x^3-3x^2}$; $F_6(x)=-\sqrt{x^2-2x+2}$

$F_7(x)=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}$; $F_8(x)=\frac{-2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+3x}{x}\right)^3}$

$F_9(x)=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}$; $F_{10}(x)=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+6)^2}$

$F_{11}(x)=2\sin\sqrt{x}$; $F_{12}(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+4\sqrt{x-1}$

### Exercice 20

1. Utiliser les formules :

$\cos(a-b)=\cos a\,.\cos b+\sin a\,.\sin b$

$\cos(a+b)=\cos a\,.\cos b-\sin a\,.\sin b$

2. $F(x)=\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{8}\sin(4x)+c\ /\ c\in\mathbb{R}$

et $G(x)=\frac{1}{4}\sin(2x)-\frac{1}{8}\sin(4x)+c'\ /\ c'\in\mathbb{R}$

### Exercice 21

2. $F(x)=\sin x-x\cos x-\pi$

### Exercice 22

1. $G(x)=\sin x+x\cos x$

2. $F(x)=x\sin x+\cos x$

### Exercice 23

1.a. On trouve : $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)^4 f(x)=3$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)f(x)=0$

2.a. Utiliser les deux expressions de $f(x)$

2.b. On trouve : $b=1$ et $c=-2$.

3. $F(x)=\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^3}+3$

### Exercice 24

1. $g'(x)=\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{2}$

3. $F(1)=\frac{\pi}{4}$ et $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2+\pi}{8}$

### Exercice 25

1. $f(x)=ax+b\ /\ (a;b)\in\mathbb{R}^2$

2. $f(x)=-\sin x+ax+b\ /\ (a;b)\in\mathbb{R}^2$

### Exercice 26

1. $\sqrt{x^2+1}=\frac{u(x)}{u'(x)}$

2. $F(x)=\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}+c\ /\ c\in\mathbb{R}$

et $G(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2+k\ /\ k\in\mathbb{R}$