Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 2x^4 - \ln x$; $f_2(x) = \ln(2x+5)$

$f_3(x) = \ln(2-x)$; $f_4(x) = \ln(x^2-9)$

$f_5(x) = \ln(x+3) + \ln(x-3)$; $f_6(x) = \ln\left(\dfrac{x+5}{x-4}\right)$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \ln(\sqrt{6}-\sqrt{5}) + \ln(\sqrt{6}+\sqrt{5})$

$B = \ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \ln(2+\sqrt{2})$

$C = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right) + \ln(9\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

Exercice 3

1. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $3^n > 192021$.
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0{,}85^n < 0{,}001$.

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\left(\dfrac{2}{x} + \ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+2\ln x}{6-4\ln x}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} 2x - 3\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 3\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(3x^2-4) - \ln(x^4+5)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

Exercice 5

Calculer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle donné :

$f_1(x) = 2x^4 - \ln x$; $I =]0;+\infty[$

$f_2(x) = x - 3 + \ln(-x)$; $I =]-\infty;0[$

$f_3(x) = \ln(3x-5) - \ln(x-3)$; $I =]3;+\infty[$

$f_4(x) = \ln(3x^2-5x+4)$; $I = \mathbb{R}$

Exercice 6

Déterminer les primitives de chaque fonction sur l'intervalle donné :

$f_1(x) = 4x - \dfrac{1}{x}$; $I =]0;+\infty[$

$f_2(x) = \dfrac{1}{2x+6}$; $I =]-3;+\infty[$

$f_3(x) = -\dfrac{3}{x-1}$; $I =]-\infty;1[$

$f_4(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4x+7}$; $I = \mathbb{R}$

$f_5(x) = \dfrac{(\ln x)^4}{x}$; $I =]0;+\infty[$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{4x-7}{2x-3}$

1. Vérifier que pour tout x de I :
$$f(x) = 2 - \frac{1}{2x-3}$$
2. Déterminer les primitives de f sur I.
3. Déterminer la primitive F de f sur I qui vérifie $F(2) = -3$.

Exercice 8

1. Déterminer les réels a et b tels que :
$$\frac{2x+3}{x^2+2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}-\{-2;0\}$$
2. En déduire les primitives la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+2x}$.

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-5x+9}{(x-2)^2}$

1. Déterminer les réels a; b et c tels que, pour tout $x \neq 2$: $f(x) = a + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{(x-2)^2}$
2. Déterminer les primitives de f sur $]2;+\infty[$

Exercice 10

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=x\ln x \quad \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. a. Montrez que f est continue à droite en 0.

1. b. Étudiez la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, et interprétez ce résultat graphiquement.

2. Montrez que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

3. Montrez que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

4. a. Calculez $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

4. b. Étudiez le signe de $f'(x)$ et dressez le tableau de variations de f.

5. Tracez $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Exercice 11

Partie 1 :

g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2-1-2\ln x$$

1. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$.

2. a. Calculez $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

2. b. Étudiez le signe de $g'(x)$ et dressez le tableau de variations de g.

3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie 2 :

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-4+\frac{3+2\ln x}{x}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. Montrez que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ et en déduire une interprétation graphique de ce résultat.

2. a. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. b. Montrez que la droite (D) d'équation $y=x-4$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

3. a. Montrez que pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

3. b. Dresser le tableau de variations de f.

4. a. Montrez que pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$f''(x)=\frac{4\ln x}{x^3}$$

4. b. Étudiez le signe de f'' et en déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion que l'on précisera.

4. c. Donnez une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.

5. Tracez (T) et $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

6. Montrez que la fonction

$$F: x\mapsto \frac{x^2}{2}-4x+(3+\ln x)\ln x$$

est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Exercice 12

Partie 1 :

g est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$$

1. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)$.

2. Montrez que pour tout x de $]-1;+\infty[$ on a :

$$g'(x)=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$$

3. Étudiez le signe de $g'(x)$ et dressez le tableau de variations de g.

4. a. Calculez $g(0)$.

4. b. En déduire le signe de $g(x)$ sur les deux intervalles $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$.

Partie 2 :

f est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. Montrez que $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ et donner une interprétation graphique du résultat.

2. a. Calculez $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2. b. Montrez que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

2. c. Étudiez la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ).

3. a. Montrez que pour tout x de $]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

3. b. Dresser le tableau de variations de f.

4. Représentez la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ).

(On admet que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse comprise entre 3 et 4)

Partie 3 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 1$.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim u_n$.

Exercice 13

Partie 1 :

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$

$$\text{par : } g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$$

1. Calculer $g'(x)$, puis étudier les variations de la fonction g.

2. Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie 2 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue à droite de 0.

2. a. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.

2. b. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3. a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

3. b. Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

4. a. Démontrer que pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = g(x)$$

4. b. Dresser le tableau de variations de f.

5. Donner l'équation de la tangente de $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = \dfrac{1}{e-1}$

6. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie 3 :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} 0 < u_0 \leq \dfrac{1}{e-1} \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n \leq \dfrac{1}{e-1}$

2. Démontrer que (u_n) est convergente, puis calculer $\lim u_n$.

Exercice 14

Partie 1 :

Soit h est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = x - \ln x$$

1. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$

2. Calculer $h'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de h

3. En déduire que

$$x - \ln x \geq 1 \text{ pour tout } x \text{ de }]0;+\infty[$$

Partie 2 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{x-\ln x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Vérifier que la fonction f est bien définie sur $[0;+\infty[$ et donner une interprétation géométrique à ce résultat

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Que peut – on déduire ?

3. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$

4. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu

5. a. Montrer que

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} \text{ pour tout } x \text{ de }]0;+\infty[$$

5. b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f

6. a. Vérifier que

$$f(x)-x=\frac{x\big(x-h(x)\big)}{h(x)} \text{ pour tout } x \text{ de }]0;+\infty[$$

6. b. Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ coupe la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y=x$ en deux points dont on déterminera les coordonnées

6. c. Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$

7. Donner l'équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1

8. Construire, dans le même repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, la droite $(\mathcal{D})$ et la courbe $(\mathcal{C})$

Partie 3 :

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0=\frac{1}{5}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que

$$0\le u_n\le 1 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante

(On pourra utiliser le résultat de la question II. 6. c.)

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 15 - Rattrapage 2018 -

Partie 1 :

Soit g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x^3-1-2\ln^2 x+2\ln x$$

Le tableau suivant donne les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

1. Calculer $g(1)$

2. À partir du tableau de variations de g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0;1]$ et $[1;+\infty[$

Partie 2 :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1. a. Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

1. b. Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

1. c. Déterminer la position relative de la droite $(\mathcal{D})$ et de la courbe $(\mathcal{C}_f)$

2. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$ et interpréter géométriquement le résultat

3. a. Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$

3. b. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$

3. c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$

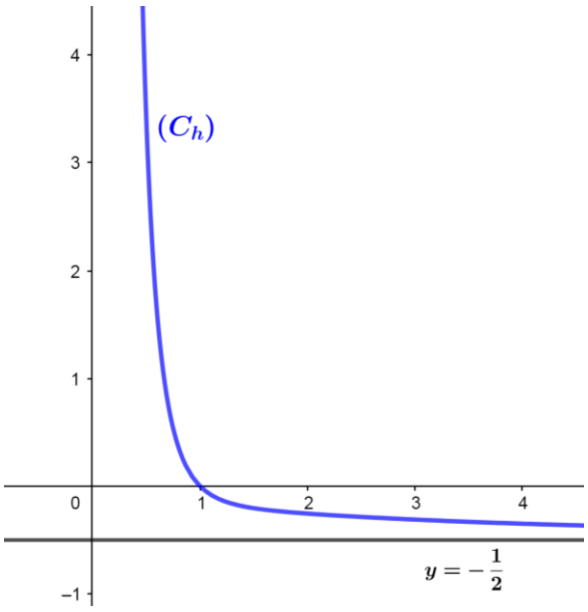
4. Construire dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ la droite $(\mathcal{D})$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ (unité : 1 cm)

Partie 3 :

On considère la fonction numérique h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$

1. a. Vérifier que $h(1) = 0$

1. b. Dans la figure ci-dessous $(\mathcal{C}_h)$ est la représentation graphique de la fonction h



Déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$ puis en déduire que $f(x) \leq x$ pour tout x de $[1;+\infty[$

2. On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \end{cases}$

2. a. Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2. b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante (On pourra utiliser le résultat de la question III. 1. b.)

2. c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 16 - Normale 2017 -

Partie 1 :

Soit g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$$

1. Vérifier que $g(1) = 0$

2. À partir du tableau de variations de la fonction g ci-contre :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;1]$

et que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$

Partie 2 :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 \ln x$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (unité : 1 cm)

1. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat

2. a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. b. Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$

3. a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$

3. b. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$

3. c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$

4. a. Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'équation

$$\left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x = 0$$

4. b. En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ coupe la droite $(\mathcal{D})$ en deux points dont on déterminera les coordonnées

4. c. Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x de $[1;2]$ et en déduire la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{D})$ sur l'intervalle $[1;2]$

5. Construire, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite $(\mathcal{D})$ et la courbe $(\mathcal{C})$

(On admettra que la courbe $(\mathcal{C})$ possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2,4 et 2,5)

6. a. Montrer que $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

6. b. Montrer que la fonction $H: x \longmapsto 2\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h: x \longmapsto \frac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$

6. c. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x\,dx = (1-\ln 2)^2$

6. d. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

Partie 3 :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que

$$1 \leq u_n \leq 2 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante

(On pourra utiliser le résultat de la question II. 4. c.)

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 17 - Rattrapage 2016 -

Partie 1 :

Soit g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2\ln x$$

Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction g sur $]0;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

Partie 2 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x$$

et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm)

1. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique à ce résultat

2. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(Pour calculer cette limite, on pourra écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln x\right]$$)

2. b. Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet , au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont la direction est celle de l'axe des ordonnées

3. a. Montrer que

$$f'(x) = g(x) \text{ pour tout } x \text{ de }]0;+\infty[$$

3. b. En déduire que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$

4. a. Montrer que $I(1;0)$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$

4. b. Montrer que $y = x - 1$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point I

4. c. Construire, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (T) et la courbe $(\mathcal{C})$

5. Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1)$$