Exercice 1

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = 4 + 3i$ et $z_2 = 5 - 2i$

Écrire les nombres suivants sous forme algébrique

$$z_1 + z_2 \; ; \quad z_1 . z_2 \; ; \quad z_1^2 \; ; \quad \frac{z_1}{z_2}$$

Exercice 2

1. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^2.
2. En déduire les relations : $1 + j + j^2 = 0$; $j^3 = 1$; $\frac{1}{j} = j^2 = \bar{j}$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

- $(3 - i)(z + 2i) = (3 + 5i)z + 2 - 4i$;
- $(8z + 2)(\bar{z} + 2 - 3i) = 0$
- $z - 2i\bar{z} = 1$;
- $z^4 - 1 = 0$

Exercice 4

Montrer que, pour tous nombres complexes z_1 et z_2 :

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

Exercice 5

1. Écrire le nombre complexe $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$ sous forme trigonométrique.
2. En déduire l'écriture algébrique du nombre $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^8$.

Exercice 6

Soit z un nombre complexe tel que : $z \neq 1$.

On pose $\mathbf{Z} = \frac{z - 2i}{z - 1}$ avec $z = x + iy$ tel que $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\mathrm{Re}(\mathbf{Z}) = \frac{x^2 + y^2 - x - 2y}{(x-1)^2 + y^2}$ et $\mathrm{Im}(\mathbf{Z}) = -\frac{2x + y - 2}{(x-1)^2 + y^2}$
2. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{D})$ des points M(z) tels que $\mathbf{Z}$ est un réel.
3. Déterminer l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M(z) tels que $\mathbf{Z}$ est un imaginaire pur.

Exercice 7

On pose : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 1 + \sqrt{2} + i$.

1. Écrire z_1 sous forme trigonométrique.

2. a. Montrer que : $z_1 . z_2 = \sqrt{2}.\overline{z_2}$.

2. b. Déduire que : $\arg(z_1) + 2\arg(z_2) \equiv 0\ [2\pi]$, puis que : $\arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{8}\ [\pi]$.

Exercice 8

On considère le nombre complexe : $Z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1. Écrire Z^2 sous forme trigonométrique.

2. En déduire $|Z^{60}|$ et $\arg(Z^{60})$.

Exercice 9

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$a = 2\sqrt{3} + 9i \ ; \quad b = -i \ ; \quad c = -4\sqrt{3} - 9i \ ; \quad d = -2\sqrt{3} + i$$

Montrer que le quadrilatère ABCD est un losange.

Exercice 10

Soient A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives : z_A ; z_B ; z_C et z_D .

Montrer que :

- $(AB) \,//\, (CD) \iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \dfrac{\overline{z_D} - \overline{z_C}}{\overline{z_B} - \overline{z_A}}$
- $(AB) \perp (CD) \iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = -\dfrac{\overline{z_D} - \overline{z_C}}{\overline{z_B} - \overline{z_A}}$

Exercice 11

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$a = -1 + i \ ; \quad b = -1 - i \ ; \quad c = 2i \ ; \quad d = 2 - 2i$$

1. Placer les points A, B, C et D.

2. Écrire les nombres complexes $\dfrac{c-a}{d-a}$ et $\dfrac{c-b}{d-b}$ sous forme algébrique puis exponentielle.

3. En déduire la nature des triangles ACD et BCD.

4. Montrer que A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 12

1. On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$; $Z = z_1^3 . z_2$

1. a. Mettre z_1^3 sous forme algébrique.

1. b. Mettre Z sous forme algébrique.

2. a. Déterminer le module et un argument de z_1 puis de z_1^3.

2. b. Déterminer le module et un argument de z_2.

2. c. Déduire des questions précédentes une écriture trigonométrique de Z.

3. En comparant les écritures trigonométrique et algébrique de Z, montrer que :

$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Exercice 13

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$. Unité graphique : 1 cm.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par :

$$a = 2\,, \quad b = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad c = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

1. Écrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique.

2. Placer les points A, B, C et I le milieu du segment [AB] dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

3. Montrer que le triangle OAB est isocèle et en déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OI}\right)$

4. Déterminer z_I l'affixe du point I puis le module de z_I .

5. En déduire que : $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 14

1. a. Montrer que, pour tous nombres complexes a et b :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

1. b. Montrer que pour tout réel x : $\cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$

2. Montrer que pour tout réel x : $\cos(3x)\,.\cos^2(5x) = \frac{1}{4}\cos(13x) + \frac{1}{4}\cos(7x) + \frac{1}{2}\cos(3x)$

3. a. Montrer que pour tout réel x : $\cos^2(x)\,.\sin^3(x) = -\frac{1}{16}\sin(5x) + \frac{1}{16}\sin(3x) + \frac{1}{8}\sin(x)$

3. b. En déduire une primitive de la fonction : $x \longmapsto \cos^2(x)\,.\sin^3(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 15 (Normale 2008)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 6z + 34 = 0$

2. Dans le plan complexe rapporte à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$, on considère les points A; B et C d'affixes respectives $a = 3+5i, b = 3-5i, c = 7+3i$. Soit M(z) un point du plan complexe et M'(z') son image par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $4-2i$.

2. a. Montrer que $z' = z + 4 - 2i$ et vérifier que le point C est l'image de A par la translation T.

2. b. Prouver que $\frac{b-c}{a-c} = 2i$

2. c. Déduire que la triangle ABC est rectangle et que $BC = 2AC$.

Exercice 16 (Normale 2018)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $2z^2 + 2z + 5 = 0$
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère la rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

2. a. Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. b. On considère le point A d'affixe a $= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ et le point B image du point A par la rotation $\mathcal{R}$.

Soit b l'affixe du point B, montrer que : $b = d.a$

3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et C l'image de B par la translation t et c l'affixe de C

3. a. Vérifier que $c = b + a$ et en déduire que $c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

3. b. Déterminer $\arg\left(\frac{a}{c}\right)$ puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral.

Exercice 17 (Normale 2019)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$
2. Dans le plan complexe rapporte à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 - i\sqrt{3}, b = 2 + 2i, c = \sqrt{3} + i$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}i$

2. a. Vérifier que $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$

2. b. En déduire que les points A, C et D sont alignés.

3. On considère z l'affixe d'un point M et z′ l'affixe de M′ l'imagede M par la rotation $\mathcal{R}$ de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Vérifier que $z' = \frac{1}{2}az$.

4. Soient H l'image du point B par la rotation $\mathcal{R}$, h son affixe et P le point d'affixe p tel que : $p = a - c$

4. a. Vérifier que : $h = ip$

4. b. Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O.

Exercice 18 (Normale 2020)

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$$

1. a. Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = -4\,(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$.

1. b. En déduire les solutions de l'équation (E).

2. Soient les nombres complexes $a = (\sqrt{6}+\sqrt{2}) + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

2. a. Vérifie que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$.

2. b. Écrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique.

2. c. En déduire que $a = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d tel que $d = a^4$. Soit z l'affixe d'un point M et z′ l'affixe de M′ image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$

3. a. Vérifier que $z' = \frac{1}{4}az$.

3. b. Déterminer l'image du point C par la rotation R.

3. c. Déterminer la nature du triangle OBC.

3. d. Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés.

Exercice 19 (Normale 2021)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

2. Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. a. Écrire a sous forme algébrique.

2. b. Vérifier que $\bar{a}b = \sqrt{3}$.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $\bar{a}$

3. Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.

4. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

4. a. Écrire z′ en fonction de z et a.

4. b. Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R, montrer $d = a + 1$.

4. c. Soit I le point d'affixe le nombre 1, montrer que ADIO est un losange.

5. a. Vérifier que $d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$; en déduire un argument du nombre $d - b$.

5. b. Écrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique.

5. c. Déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{DB}\right)$.

Exercice 20

Pour tout nombre complexe z, on pose : $P(z) = z^4 - 4z^2 + 16$

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $P(z) = 0$

1. Déterminer le réel a tel que : $P(z) = (z^2 + az + 4)(z^2 - az + 4)$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

On notera z_1 la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives.

Vérifier que les solutions de (E) sont : z_1 ; $-z_1$; $\overline{z_1}$; $-\overline{z_1}$.

Écrire ces solutions sous forme trigonométrique.

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$. (Unité : 1 cm).

3. a. Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives z_1 ; $-\overline{z_1}$; $-z_1$; $\overline{z_1}$.

3. b. Montrer que ces points sont situés sur le cercle de centre O et de rayon 2.

Exercice 21

On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1. Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$, puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait : $P(z) = (z^2 + 3).Q(z)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. On considère dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = i\sqrt{3}\ ;\ z_B = -i\sqrt{3}\ ;\ z_C = 3 + 2i\sqrt{3} \text{ et } z_D = \overline{z_C}$$

Montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.

4. On note E le symétrique de D par rapport à O.

Montrer que $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$ puis déterminer la nature du triangle BEC.

Exercice 22

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$. Unité graphique : 1 cm.

1. On rappelle que, pour tous nombres complexes a et b :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^3 = 8$.

2. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par :

$$a = 2\ ,\quad b = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c = -1 - i\sqrt{3}.$$

On appelle $\mathcal{R}$ la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et $\mathcal{R}'$ la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

On pose $B' = \mathcal{R}'(B)$ et $C' = \mathcal{R}(C)$ et on note b' et c' les affixes respectives de B' et C'.

2. a. Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Dans la suite de l'exercice, on complétera cette figure.

2. b. Montrer que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

2. c. Montrer que b' et c' sont des nombres conjugués.

3. On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments [CB], [BB'], [B'C'] et [C'C].

On note m, n, p et q leurs affixes.

3. a. Montrer que l'affixe n du point N est égale à $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

En déduire que les points O, N et C sont alignés.

3. b. Montrer que $n + 1 = i(q + 1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?

3. c. Montrer que le quadrilatère MNPQ est un carré.

Exercice 23

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2i$, par B le point d'affixe $z_B = -2 + 2i$ et par $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre [AB].

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathcal{C})$ et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$.

Écrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathcal{C})$.

3. Sur le cercle $(\mathcal{C})$, on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E}}\right)$ est $\frac{\pi}{4}$.

3. a. Préciser le module et un argument de $z_E + \frac{1}{2}$.

3. b. En déduire que $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$

4. Soit $\boldsymbol{r}$ la transformation du plan $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z + \frac{1}{2}\right)$.

4. a. Déterminer la nature de $\boldsymbol{r}$ et ses éléments caractéristiques.

4. b. Soit K le point d'affixe $z_K = 2$.

Déterminer par le calcul l'image de K par la transformation $\boldsymbol{r}$.

Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

Exercice 24

Première partie

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$(E) : z^3 + 2z^2 - 16 = 0.$$

1. Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme :

   $(z-2)(az^2+bz+c)=0$ où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.

2. En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1. Placer les points A, B et D d'affixes respectives :

   $$z_A = -2 - 2i, \quad z_B = 2 \quad \text{et} \quad z_D = -2 + 2i.$$

2. Calculer l'affixe z_C du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.

3. Soit E l'image du point C par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et F l'image du point C par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3. a. Calculer les affixes des points E et F, notées z_E et z_F.

3. b. Placer les points E et F.

4. a. Vérifier que $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$.

4. b. En déduire la nature du triangle AEF.

5. Soit I le milieu de [EF].

   Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation $\mathcal{R}$ de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.