Fonctions exponentielles

Pr. Taher BOUYGUIR

Exercice ① : Session normale 2022

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$ (unité :1cm).

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

3. **a.** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.

b. Etudier le signe $(f(x) - x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ).

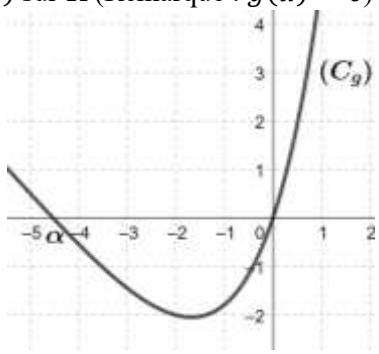
4. **a.** Montrer que $f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Vérifier que $x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. **a.** Montrer que $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$; où $g(x) = (2x + 4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. A partir de la courbe ci-contre de la fonction g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque : $g(\alpha) = 0$)



c. Etudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.

6. Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$. (On prend : $ln(4) \approx 1.4$, $\alpha \approx -4.5$ et $f(\alpha) = -3.5$)

a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer $(f^{-1})'(ln4)$.

7. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que $0 < u_n < \ln 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice ②: Session normale 2020

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$ (unité :2cm).

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

b. Résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$ puis montrer que la courbe (C) est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; 2 + ln4[$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $]2 + ln4; +\infty[$.

3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.

4. **a.** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$.

b. dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que $A(2; 2)$ est un point d'inflexion de (C).

6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2 + ln3 < \alpha < 2 + ln4$.

7. Construire (Δ) et (C) (On prend $ln2 \approx 0.7$ et $ln3 \approx 1.1$)

8. **a.** Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b. Construire dans le même repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} (Remarquer que la droite (Δ)est perpendiculaire à la première bissectrice du repère)

c. Calculer $(f^{-1})'(2 - ln3)$ (Remarquer que $f^{-1}(2 - ln3) = 2 + ln3$.

Exercice ③: Session de rattrapage 2020

I- Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2$.

1. Montrer que $g'(x) < 0$, pour tout $x \in]0, +\infty[$.

2. Déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$; (Remarquer que $g(1) = 0$)

II- On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$f(x) = (1 - x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2lnx$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$ (unité :2cm).

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.

2. **a.** Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b. montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.

3. **a.** Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = (x - 2)g(x)$.

b. Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0; 1]$ et sur $[2; +\infty[$ et croissante sur $[1; 2]$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$, (On admet $f(2) \approx 1.25$)

4. Sachant que $f(3) \approx 0.5$ et $f(4) \approx -1.9$ montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans

l'intervalle]3; 4[.

5. Construire (C) dans le repère $(O,\vec{i};\vec{j})$.

III- On pose $h(x)=f(x)-x$ pour tout x de l'intervalle $[1;2]$.

x	1	2
$h(x)$	0 ↘	$h(2)$

1. a. A partir du tableau de variations de la fonction h ci-contre
Montrer que $f(x)\leq x$ pour tout x de l'intervalle $[1;2]$.

b. Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f(x)=x$ sur l'intervalle $[1;2]$.

2. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=2$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que $1\leq u_n\leq 2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice ④ : extrait de rattrapage 2019

Première partie:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par:

$$f(x)=2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$. (unité : 1cm)

1. a. Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, et interpréter graphiquement le résultat.

b. Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, et interpréter graphiquement le résultat.

2. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Montrer que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3. a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$ on a:

$$f'(x)=\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$$

b. Vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R}); x^2-2x+4>0$.

c. Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;2]$, et strictement croissante sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $[2;+\infty[$.

d. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$

4. Tracer (C_f) dans le repère$(O;\vec{i};\vec{j})$.

5. a. Vérifier que la fonction $H: x\mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ est une primitive de la fonction $h: x\mapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur l'intervalle $[2;4]$.

b. Vérifier que :
$(\forall x\in\mathbb{R}^*): f(x)=2+8e^{x-4}-32\frac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$.

Deuxième partie :

1. Soit g la fonction définie sur $[2;4]$ par:

$$g(x)=8(x-2)e^{x-4}-x^2.$$

a. Calculer $g(4)$.

b. Vérifier que pour tout x de $[2;4]$,

$$g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1).$$

c. Vérifier que pour tout x de $[2;4]$: $e^{x-4}-1\leq 0$ puis en déduire que pour tout x de $[2;4]$: $g(x)\leq 0$.

2. a. Vérifier que pour tout x de $[2;4]$:

$$f(x)-x=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x).$$

b. En déduire que pour tout x de $[2;4]$:$f(x)\leq x$.

3. On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0=3\ et\ u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de IN.

a. Montrer que : $(\forall n\in IN): 2\leq u_n\leq 4$.

b. Déterminer la monotonie de la suite (u_n), puis en déduire quelle est convergente.

c. Calculer la limite de (u_n).

Exercice ⑤: Session normale 2009

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=2ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$.

I- 1. Vérifier que $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x\in\mathbb{R})1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}>0$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=ln4$ et interpréter ce résultat graphiquement.

3. a. Montrer que $f'(x)=\frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x}-1)}{(\sqrt{e^x}-1)^2+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et vérifier que $f'(0)=0$.

b. Etudier le signe de $\sqrt{e^x}-1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que f est croissante sur $[0,+\infty[$ et décroissante $]-\infty,0]$.

4. a. Vérifier que
$(\forall x\in\mathbb{R}): f(x)=2x+2ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$.

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x$ est une asymptote de (C) au voisinage de $+\infty$.

5. a. Vérifier que
$e^x-3\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Etudier le signe de $\sqrt{e^x}-2$ et $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire que $e^x-2\sqrt{e^x}+2\leq\sqrt{e^x}$ pour tout x de l'intervalle $[0,ln4]$.

d. Montrer que $f(x)\leq x$ pour tout x de l'intervalle $[0,ln4]$.

6. Construire la courbe (C) (On admettra que (C) possède deux points d'inflexion dont l'abscisse de l'un est inférieure à -1 et l'abscisse de l'autre est supérieure à 2, la détermination de ces deux points n'est pas demandée et on prendra $ln4\approx 1.4$)

II- Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que $0<u_n<\ln 4$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et sa limite.

Pr. Taher BOUYGUIR