Exercice 1

Simplifier les nombres réels suivantes :

$A = e^{\ln 9}$; $B = e^{4\ln 2}$

$C = e^{-\ln 3}$; $D = e^{\frac{1}{2}\ln 9}$

$E = e^{\ln 5+\ln 3}$; $F = e^{\ln 5} + e^{\ln 3}$

$G = e^{\ln 5-\ln 3}$; $H = e^{\ln 5} - e^{\ln 3}$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$e^{2x} = 4$; $e^{7x+1} = -2$

$e^{3x-10} = e^2$; $e^{x+6} - e^{4x+2} = 0$

$e^{3x^2+2x-5} = 1$; $e^{3x^2+2x-5} = 1$

$e^{x^2-5} = \frac{1}{e}$; $\frac{e^{2x}}{e^{x+1}} = e^{3x+2}$

$\frac{1}{e} = \frac{e^{4x+1}}{e^{x+3}}$; $\frac{e^{-x}-2}{e^x+1} = -2$

$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$; $e^{3x} + e^{2x} = 2e^x$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$e^{2x+1} < e^{3-x}$; $e^{-3x+5} \geq e^{x-1}$

$e^{x+3} \leq 1$; $e^{1-3x} \leq 2$

$e^{x^2+4} < e^{x+4}$; $e^{x^2+1} \geq e^{2x}$

$e^{1-4x} - e^{2+x} \leq 0$; $e^{x^2+5x-2} - e^4 > 0$

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{5x-2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-x^2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{5-3x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{x+1}-2}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-4}{e^x+3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x+2}{e^{2x}+e^x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+2}{e^{2x}+e^x-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} - 3e^x - 3$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^x - 4x + 8$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-5x-7)e^x$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

$\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{6x}$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{x-1}-1}{1-x}$

$\lim\limits_{x\to1} \frac{e^{x+2}-e^3}{e^x-e}$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{2x}+3e^x-4}{e^x-1}$

Exercice 5

Déterminer la dérivée de la fonction f :

$f(x) = 2e^x - 4x + 3$; $f(x) = (3x-1)e^x$

$f(x) = \frac{e^x-x}{e^x-1}$; $f(x) = \frac{3}{e^x-x}$

$f(x) = e^{x^3-3x+7}$; $f(x) = e^{3+\ln x}$

$f(x) = 3e^{2x} + e^{-x}$; $f(x) = xe^{-x}$

Exercice 6

Déterminer les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = 5e^x + x - 1$; $f(x) = 3e^{3x} - 2x$

$f(x) = e^{3x-2}$; $f(x) = 2xe^{x^2}$

$f(x) = (x-1)e^{x^2-2x}$; $f(x) = e^x(e^x-1)^3$

$f(x) = \frac{e^x}{e^x+2}$; $f(x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$

Exercice 7

On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x - x - 1$

1. Calculer $h'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Etudier le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $h(0)$ et dresser le tableau de variations de h (sans calculer les limites)
4. En déduire que $h(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x^2+1)e^x - 1$

1. Montrer que $h'(x) = (x+1)^2e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
2. Donner le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $h(0)$ puis dresser le tableau de variations de h
   (Le calcul des limites n'est pas demandé)
4. Etudier à partir du tableau de variations le signe de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 2$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. a. Calculez $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

1. b. Montrez que la droite (Δ) d'équation $y = -x - 2$ est une asymptote de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

2. a. Montrez que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. b. Montrez que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et en deduire la direction de la branche parabolique au voisinage de $+\infty$.

3. a. Calculez pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x)$.

3. b. Étudiez le signe de f' et dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Tracez la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ).

Exercice 10

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. Calculez $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Montrez que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

3. a. Vérifiez que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$$

3. b. Montrez que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

4. a. Calculez pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x)$.

4. b. Étudiez le signe de f' et dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. Tracez les droite (Δ), (D) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 11 - Session Normale 2004 -

I) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. a. Vérifiez que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{e^{-x} + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$$

1. b. Montrez que f est une fonction impaire.

2. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. a. Montrez que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

3. b. Dresser le tableau de variations de f.

3. c. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+ : 1 - \dfrac{2}{e^x + 1} \leq \dfrac{1}{2}x$

4. Montrez que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \left(1 - \dfrac{1}{2}x\right) = 0$, puis donner une interprétation à ce résultat.

5. Représenter $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

II) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{e^{u_n} + 1} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n > 0$.

2. a. En utilisant le résultat de la question 3) c) montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$

2. b. Montrer que (u_n) est décroissante.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, puis calculer $\lim u_n$

Exercice 12

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)e^x$$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

1. b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique du résultat .

1. c. Montrer que $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

2. a. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{(x^2-x+1)}{x^2}e^x$$

2. b. Montrer que $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

2. c. En déduire les variations de la fonction f sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

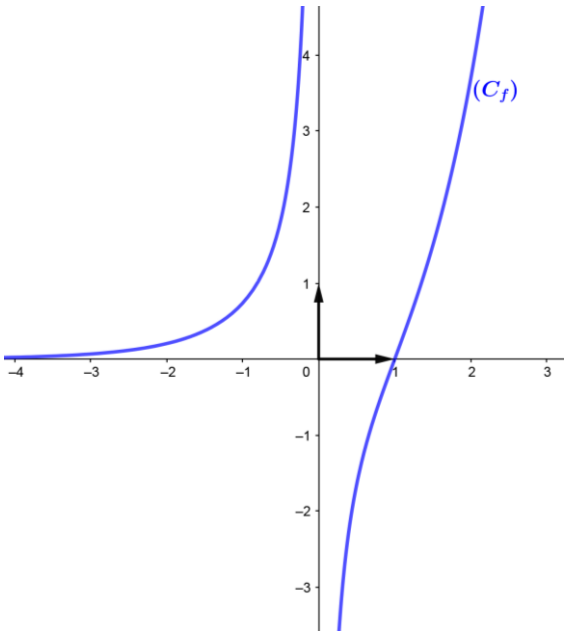
2. d. Calculer $f(1)$ et dresser le tableau de variations de f.

3. Dans la figure ci-contre $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de la fonction f.

3. a. Donner l'équation de la tangente (T) de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

3. b. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.

3. c. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2$.



Exercice 13 - Session Rattrapage 2020 -

I . Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty$ par : $g(x) = e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2$

1) Monter que $g'(x) < 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

2) Déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$; (remarquer que $g(1) = 0$)

II . On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln x$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (unité : 2 cm)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement

3) a) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$,

$$f'(x) = (x-2).g(x)$$

3) b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et sur $[2;+\infty[$ et croissante sur $[1;2]$

3) c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$, (on admet $f(2) \approx 1{,}25$)

4) Sachant que $f(3) \approx 0{,}5$ et $f(4) \approx -1{,}9$ montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]3; 4[$.

5) Construire $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

III . On pose $h(x) = f(x) - x$ pour tout x de l'intervalle $[1; 2]$

1) a) À partir du tableau de variations de la fonction h ci-dessous, montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x de l'intervalle $[1; 2]$

x	1	2
$h(x)$	0 ↘	$h(2)$

1) b) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[1; 2]$

2) Soit (u_n) un la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2) a) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2) b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2) c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim u_n$

Exercice 14 - Session Normale 2020 -

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité : 2cm)

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2) a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$

2) b) Résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$ puis montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; 2 + \ln 4]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2 + \ln 4\,; +\infty[$

3) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat

4) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$$

4) b) Dresser le tableau de variations de la fonction f

5) Calculer $f''(x)$ pour tout x de puis montrer que A(2,2) est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$

6) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que

$$2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$$

7) Construire (Δ) et $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ ci-dessous
(on prend $\ln 2 \approx 0{,}7$ et $\ln 3 \approx 1{,}1$)

8) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

8) b) Construire dans le même repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1}
(Remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère)

8) c) Calculer $(f^{-1})'(2 - \ln 3)$
(Remarquer que $f^{-1}(2 - \ln 3) = 2 + \ln 3$)

Exercice 15 - Session Normale 2018 -

I) Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$$

Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction g

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

1) Vérifier que $g(0) = 0$

2) Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$

II) Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (unité : 1 cm)

1) a) Vérifier que $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x} - \dfrac{x}{e^x} + x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

1) b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x)$ puis en déduire que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = x$

1) c) Vérifier que $f(x) = \dfrac{x^2 - x + x}{e^x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

1) d) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

2) a) Montrer $f(x) - x$ et $x^2 - x$ ont le même signe pour tout x de $\mathbb{R}$

2) b) En déduire que $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (D) sur chacun des intervalles $]-\infty;0]$ et $[1;+\infty[$, et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0;1]$

3) a) Montrer que : $f'(x) = g(x)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

3) b) En déduire que la fonction f est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$

3) c) Dresser le tableau de variations de la fonction f

4) a) Montrer que : $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

4) b) En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux points d'inflexion d'abscisses respectives 1 et 4

5) Construire (D) et $(\mathcal{C})$ dans le même repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (on prend : $(4) \approx 4{,}2$)

6) a) Montrer que la fonction

$$H: x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

est une primitive de la fonction $h: x \mapsto -x^2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ puis en déduire que

$$\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx = \frac{2e-5}{e}$$

6) b) À l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = \dfrac{e-2}{e}$

6) c) Calculer en cm² l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C})$ et (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

III) Soit (u_n) un la suite numérique définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

1) Montrer que $0 \le u_n \le 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (on pourra utiliser le résultat de la question **II)3)b)**)

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

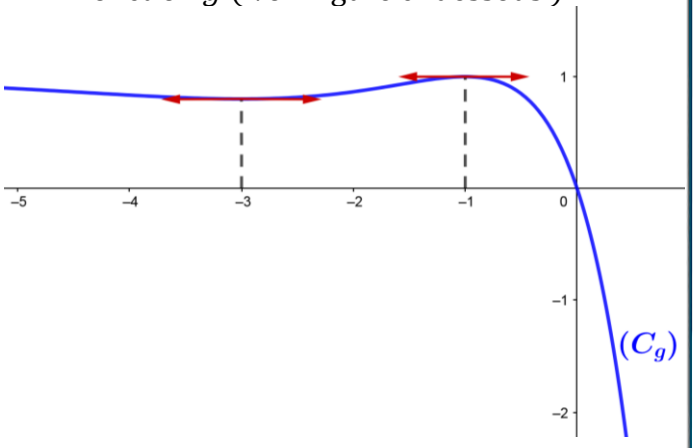
Exercice 16 - Session Rattrapage 2017 -

I. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - (x+1)^2e^x$$

1) Vérifier que $g(0) = 0$

2) À partir de la courbe représentative $(\mathcal{C}_g)$ de la fonction g (voir figure ci-dessous)



Montrer que : $g(x) \ge 0$ pour tout x appartenant à $]-\infty;0]$ et que $g(x) \le 0$ pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$

II. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (unité : 2 cm)

1) a) Vérifier que $f(x) = x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ puis en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

1) b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (x+1)]$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$

1) c) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de la droite (D)

2) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

(on pourra écrire $f(x)$ sous la forme $x\left[1 + \frac{1}{x} - \left(x + \frac{1}{x}\right)e^x\right]$)

2) b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on déterminera la direction.

3) a) Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$

3) b) Montrer que la fonction f est croissante sur $]-\infty;0]$ et décroissante sur $[0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

3) c) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet deux points d'inflexion d'abscisses -3 et -1

4) Construire, dans le même repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$

(On prendra $f(-3) \approx -2{,}5$ et $f(-1) \approx -0{,}75$)

5) a) Vérifier que $H: x \longmapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h: x \longmapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer que

$$\int_{-1}^{0} xe^x\,dx = \frac{2}{e} - 1$$

5) b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x\,dx = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$

5) c) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -1$

Exercice 17 - Session Normale 2009 -

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$$

$(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

I) 1. Vérifier que :

$$e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$$

pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln 4$ et interpréter géométriquement ce résultat.

3. a) Montrer que : $f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et vérifier que $f'(0) = 0$

3. b) Étudier le signe de $\sqrt{e^x} - 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$

4. a) Vérifier que

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$$

4. b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

5. a) Vérifier que :

$$e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$$

pour tout x de $\mathbb{R}$

5. b) Étudier le signe de $\sqrt{e^x} - 2$ et $\left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ sur $\mathbb{R}$.

5. c) En déduire que : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$ pour x de l'intervalle $[0; \ln 4]$.

5. d) Montrer que : $f(x) \leq x$ pour tout x de l'intervalle $[0; \ln 4]$

6. Construire la courbe $(\mathcal{C})$.
(on admettra que la courbe $(\mathcal{C})$ possède deux points d'inflexion dont l'abscisse de l'un est inférieure à -1 et l'abscisse de l'autre est supérieure à 2, la détermination de ces deux points n'est pas demandée et on prendra $\ln 4 \simeq 1{,}4$).

II) Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

On pourra, ci-après, utiliser les résultats de l'étude de la fonction f.

1. Montrer que : $0 \leq u_n \leq \ln 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 18 - Session Rattrapage 2008 -

I) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - 2x$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que g est croissante sur $[0; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; 0]$.

2. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
(remarquer que $g(0) = 1$)

II) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(e^{2x} - 2x)$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

1. a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

1. b) Vérifier que $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{e^{2x}}{x} - 2\right) \dfrac{\ln(e^{2x} - 2x)}{e^{2x} - 2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$

1. c) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$
(on rappelle que : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$).

1. d) En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet, au voisinage de $-\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

2. a) Pour tout x de $[0; +\infty[$ vérifier que :
$1 - \dfrac{2x}{e^{2x}} > 0$ et que $2x + \ln\left(1 - \dfrac{2x}{e^{2x}}\right) = f(x)$

2. b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
(on rappelle que : $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{e^u}{u} = +\infty$)

2. c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

2. d) Montrer que : $f(x) - 2x \leq 0$ pour tout x de $[0; +\infty[$ et en déduire que $(\mathcal{C})$ est en-dessous de (D) sur l'intervalle $[0; +\infty[$

3. a) Montrer que : $f'(x) = \dfrac{2(e^{2x} - 1)}{g(x)}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

3. b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Tracer (D) et $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$
(On admet que la courbe $(\mathcal{C})$ a deux points d'inflexion).

Exercice 19 - Session Normale 2015 -

I- Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par
$g(x) = e^x - 2x$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que g est décroissante sur $]-\infty; \ln 2]$ et croissante sur $[\ln 2 ; +\infty[$

2. Vérifier que $g(\ln 2) = 2(1 - \ln 2)$ puis déterminer le signe de $g(\ln 2)$.

3. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

II- On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 2x}$

et soit $(\mathcal{C})$ courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité : 1 cm).

1. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$

(remarquer que $e^x - 2x = x\left(\frac{e^x}{x} - 2\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$)

1. b) Interpréter géométriquement chacun des deux derniers résultats.

2. a) Montrer que $f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x-2x)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2. b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. c) Montrer que $y = x$ est une équation de la droite (T) tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point O origine du repère.

3. Tracer, dans le même repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, la droite (T) et la courbe $(\mathcal{C})$

(on prendra $\frac{1}{e-2} \approx 1{,}4$ et on admettra que la courbe $(\mathcal{C})$ a deux points d'inflexion, l'abscisse de l'un appartient à l'intervalle $]0;1[$ et l'abscisse de l'autre est supérieur à $\frac{3}{2}$)

4. a) Montrer que $xe^{-x} < \frac{x}{e^x-2x} < \frac{1}{e-2}$ pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$

4. b) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_0^1 xe^{-x}\,dx = 1 - \frac{2}{e}$

4. c) Soit, en cm^2, $\mathcal{A}(E)$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Montrer que : $1 - \frac{2}{e} \leq \mathcal{A}(E) \leq \frac{1}{e-2}$

III- Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-\infty;0]$ par : $h(x) = f(x)$

1. Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

2. Tracer, dans le même repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, la courbe $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ représentative de la fonction h^{-1}

IV- Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$u_0 = -2$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que $u_n \leq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
(remarquer, graphiquement, que : $h(x) \geq x$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty;0]$)

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.