Exercice 1

Dire si chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ est solution ou non de l'équation différentielle : $y' = 3y - 2$

a. $f(x) = e^{3x}$; b. $f(x) = e^{3x} - \frac{2}{3}$;

c. $f(x) = 5e^{3x} + \frac{2}{3}$; d. $f(x) = 5e^{2x} + 3$.

Exercice 2

Résoudre chaque équation différentielle.

a. $y' = 2x - 5$; b. $y' = \sin(2x) - x + 1$;

c. $y'' = -3 + e^{2x}$; d. $y'' = \cos x + e^{x}$.

Exercice 3

Résoudre chaque équation différentielle.

a. $y' = \frac{5}{4}y$; b. $2y' = -7y$; c. $3\theta' = 5\theta$; d. $2\theta + 5\theta' = 0$;

e. $y' = 2y + 3$; f. $4y' = 2y - 5$; g. $\theta' = 5\theta - 1$; h. $2\theta = 5\theta' - \frac{1}{4}$.

Exercice 4

Déterminer la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée.

1. $(E_1) : y' = 7y$ et $y(0) = 1$
2. $(E_2) : y' + \frac{1}{4}y = 0$ et $y(3) = -1$
3. $(E_3) : 3y' + 7y = 0$ et $y(2) = -5$
4. $(E_4) : y' = 4y - 3$ et $y(0) = -1$
5. $(E_5) : y' - \frac{1}{4}y = 6$ et $y(-1) = 1$
6. $(E_6) : -2y' + 11y = 4$ et $y(-2) = -3$

Exercice 5

f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y$ telle que $f'(1) = 2$

1. Expliquer pourquoi $f(1) = \frac{2}{3}$.
2. Déterminer la fonction f .

Exercice 6

f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $3y' - 6y = 1$ telle que $f'(1) = 2$

1. Expliquer pourquoi $f(1) = \frac{5}{6}$.

2. Déterminer la fonction f .

Exercice 7

Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' + 5y = 0$ telle que $y'(2) = 0$.

Exercice 8

Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\frac{3}{4}y' + y = 6$ telle que $y'(2) = 0$.

Exercice 9

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{-4x}$.

Déterminer une équation différentielle de la forme $y' = ay$ dont f est une solution.

Exercice 10

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = \lambda f$ où λ est un nombre réel.

$(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de f dans un repère et la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x + 2$ est tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.

Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

Exercice 11

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

Déterminez f sachant que :

- Pour tout réel x, $2f(x) + f'(x) = 3$.
- $(\mathcal{C})$ admet au point d'abscisse $x = 1$ une tangente de coefficient directeur 2.

Exercice 12

f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $2y' - 4y = 1$ telle que $f''(1) = -2$

1. Démontrer que si y est une solution de (E) alors pour tout réel x, $y''(x) = 2y'(x)$.

2. En déduire que pour tout réel x, $y''(x) = 4y(x) + 1$

3. En déduire $f'(1)$ et $f(1)$.

4. Déterminer la fonction f.

Exercice 13

Pour chaque question, cocher les réponses correctes.

1. L'équation différentielle $y' = 2y + 3$

- ❑ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$;
- ❑ a une unique fonction solution sur $\mathbb{R}$;
- ❑ a une infinité de fonctions solutions sur $\mathbb{R}$.

2. La seule fonction f définie sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $y' = -2y + 4$ et telle que $f(0) = 3$ est définie par :

- ❑ $f(x) = e^{-2x} - 4$;
- ❑ $f(x) = 3e^{-2x}$;
- ❑ $f(x) = e^{-2x} + 2$.

3. Une solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 4e^{-2x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

- ❑ $f(x) = e^{-3x}$;
- ❑ $f(x) = -3x + 4$;
- ❑ $f(x) = 4e^{-2x}$.

4. Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 3y = 0$.

- ❑ La fonction $x \mapsto 2e^{-3x}$ est une solution de (E).
- ❑ La fonction $x \mapsto 2e^{3x}$ est une solution de (E).
- ❑ La fonction $x \mapsto \frac{1}{3}e^{-3x}$ est la solution de (E) telle que $f'(0) = 3$.
- ❑ La fonction $x \mapsto 2e^{3(1-x)}$ est la solution de (E) telle que $f(1) = 2$.

5. Soit l'équation différentielle (E) : $y' = 2y - 6$.

- ❑ Les courbes représentant les solutions ont une asymptote verticale.
- ❑ En chaque point d'ordonnée 2, les tangentes aux courbes représentant les solutions ont pour coefficient directeur -6.
- ❑ Les courbes représentant les solutions ont pour asymptote la droite d'équation $y = 3$.
- ❑ Il existe une solution dont la courbe passe par le point de coordonnées $(0 ; 3)$.

Exercice 14

Un corps de masse m est lâché en chute libre sans vitesse initiale.

La vitesse $v : t \mapsto v(t)$ est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{k}{m}y = g$ où k est le coefficient de freinage et g l'accélération de la pesanteur.

Démontrez que : $v(t) = \frac{gm}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$.

Exercice 15

On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs.

La taille de la population au temps t, est notée $g(t)$.

On définit ainsi une fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

La variable t réelle, désigne le temps, exprimé en années.

L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus.

Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution dans $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{y}{4}$.

1. Résolvez (E)
2. Déterminez $g(t)$ lorsqu'à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs ($g(0) = 1$).
3. Après combien d'années, la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

Exercice 16

Résoudre chaque équation différentielle.

a. $y'' + y' - 30y = 0$;
b. $y'' - 2y = 0$;
c. $y'' + 14y' + 49y = 0$;
d. $4y'' - 9y' = 0$;
e. $4y'' + 16y' + 25y = 0$;
f. $y'' + 9y = 0$

Exercice 17

Déterminer la solution de l'équation différentielle qui vérifie les conditions initiales données.

1. $(E_1) : y'' + 2y' = 0$ et $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$
2. $(E_2) : 4y'' - 3y = 0$ et $y(0) = 1$; $y'(0) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$
3. $(E_3) : y'' + 25y = 0$ et $y\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$; $y'\left(\frac{\pi}{5}\right) = -1$
4. $(E_4) : y'' - 2y' + y = 0$ et $y(1) = e$; $y'(2) = 0$
5. $(E_5) : y'' - y' - 6y = 0$ et $y(0) = -4$; $y'(0) = 0$
6. $(E_6) : y'' - 4y' + 13y = 0$ et $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$

Exercice 18

On considère l'équation différentielle $(E_m) : y'' - 2y' + (1 - m)y = 0$ où m est un réel.

1. Résoudre (E_m) dans les cas suivants :

$m = 1$; $m = 9$; $m = -16$

2. Résoudre et discuter l'équation différentielle (E_m) suivant les valeurs de m.