SÉRIE D'EXERCICES N° 8 | VERSION ÉLÈVE

1ère Spé Maths

Applications de la dérivation

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Exercice 1 : Parité

Étudier la parité de chaque fonction :

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ sur $\mathbb{R}$;
2. $g(x) = 2x^3 - x$ sur $\mathbb{R}$;
3. $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$;
4. $k(x) = x^2 - 3x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Variations d'un polynôme

Dresser le tableau de variation de $f(x) = x^3 - 12x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Fonctions rationnelles

Étudier les variations de :

1. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$ sur $]-2\,;+\infty[$;
2. $g(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ sur $]1\,;+\infty[$.

Exercice 4 : Extremums sur un intervalle

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ sur $[-3\,;5]$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer le maximum et le minimum de f sur $[-3\,;5]$.

Exercice 5 : Rectangle sous une parabole

Un rectangle $OABC$ a deux côtés sur les axes d'un repère orthonormé et son sommet B sur la courbe d'équation $y = 9 - x^2$, avec $B(x\,;9 - x^2)$ et $x \in]0\,;3[$.

1. Exprimer l'aire $A(x)$ du rectangle.
2. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire est maximale, et cette aire maximale.

Exercice 6 : Coût moyen minimal

Le coût de fabrication de q tonnes d'un produit ($q > 0$) est $C(q) = q^2 + 100$ (en milliers d'euros). Le coût moyen par tonne est $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$. Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ? Quel est ce coût moyen minimal ?

Exercice 7 : Une inégalité

Montrer que, pour tout $x > 0$, $x^2 + \dfrac{16}{x} \geqslant 12$.

Exercice 8 : Positions relatives

1. Étudier la position relative des courbes de $f(x) = x^3 - 2x$ et $g(x) = 2x$.
2. Déterminer la tangente T à la courbe de $u(x) = x^3$ au point d'abscisse -1. Vérifier que $x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$, puis étudier la position de la courbe par rapport à T.

Exercice 9 : Synthèse

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x + 3)(x - 1)}{(x + 1)^2}$.
2. Dresser le tableau de variation de f. En déduire que $f(x) \geqslant 3$ pour tout $x > -1$.
3. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite $\Delta : y = x$.