Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Étudier la parité de nombres suivants :

$4n+300$; $14n+111$; 731×432;
$2^{n+1}+15$; $4n^2+8n+13$; $n(n+1)$;
n^2+5n+3 ; $n(n+1)(n^2+5n+3)$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $a = 2n+4$ et $b = 6n+11$.

① Étudier la parité de a et b.

② Simplifier le nombre $(6n+11)(-1)^{2n+4} - (2n+4)(-1)^{6n+11}$.

③ Monter que $a^2 + (b+1)^2$ est un multiple de 20.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On pose : $a = 2^{n+3} - 5 \times 2^n$ et $b = 7^{n+1} \times 2^{n+3}$.
Montrer que a est multiple de 3 et que 56 divise b.

Exercice 4

① Déterminer le chiffre a tel que le nombre $5a74$ soit divisible par 3 .

② Déterminer le chiffre b tel que le nombre $815b$ soit divisible à la fois par 2 et 9 .

③ Déterminer le chiffre c tel que le nombre $921c$ soit divisible par 3 et non pas par 9.

Exercice 5

Parmi la liste de nombres ci-dessous, indiquer ceux qui sont premiers : 25422 ; 101 ; 70107 ; 137 ; 15631.

Exercice 6

Soit n un entier naturel impair.

① Étudier la parité de n^2-1 et n^2+1.

② Montrer que 8 divise n^2-1.

③ En déduire que 16 divise n^4-1.

Exercice 7

① Vérifier que pour tout entier naturel n :
$n^2+4n+9 = (n+3)(n+1)+6$.

② Déterminer tous les valeurs de l'entier naturel n pour que le nombre $n+3$ divise n^2+4n+9.

Exercice 8

Soient n et m deux entiers naturels.

① Montrer que $m+n$ et $m-n$ ont la même parité.

② Déterminer tous les nombres entiers m et n qui vérifient :
$m^2 - n^2 = 12$.

Exercice 9

① Déterminer les diviseurs du nombre 22.

② En déduire tous les entiers naturels x et y qui vérifient :
$(x+2)(y+1) = 22$.

Exercice 10

① Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres :
495 ; 156 ; 1404 ; 4056.

② Simplifier l'écriture des nombres suivants :
$\frac{1404}{4056}$; $\sqrt{1404 \times 4056}$; $\frac{495}{1404} + \frac{156}{4056}$.

③ Déterminer :
$pgcd(495,156)$; $pgcd(495,1404)$; $pgcd(1404,4056)$
$ppcm(495,156)$; $ppcm(495,1404)$; $ppcm(1404,4056)$.

Exercice 11

Soient a et b deux entiers naturels tels que : $a = 4680$ et $b = 5940$.

① Décomposer a et b en produit de facteurs premiers.

② En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de $a^2 \times b^3$.

③ Déterminer $pgcd(a,b)$ et $ppcm(a,b)$ puis vérifier que :
$pgcd(a,b) \times ppcm(a,b) = ab$.

④ Déterminer le plus petit entier naturels m tel que ma soit un carré parfait.

⑤ Déterminer le plus petit entier naturels n tel que nb soit un cube d'un entier naturel.

⑥ Simplifier : $\frac{a}{b}$ et $\sqrt{ab}$.

Exercice 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $x = 7^{n+2} - 7^n$ et $y = 3 \times 7^{n+1} + 5 \times 7^n$.

① Montrer que x est divisible par 3 et que y est un multiple de 13.

② Décomposer, en fonction de n, les nombres x et y en produit de facteurs premiers.

③ Déterminer $\text{pgcd}(x,y)$ et $\text{ppcm}(x,y)$ en fonction de n.

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}$.

① Développer $(n+1)^2 - n^2$.

② En déduire que tout nombre impair peut s'écrit comme la différence des carrés de deux entiers consécutifs.

③ Application : Montrer que 2017 est la différence de deux carrés d'entiers consécutifs.

④ Soit $a = n^2+n+7$.
a) Montrer que a est impair.
b) En déduire que a est la différence de deux carrés d'entiers consécutifs.

✍ Activité ① :

On considère les nombres : $,1970,89,2017,1,\sqrt{19},240,\sqrt{34},-8,8721,5,4$

Parmi les nombres précédents trouver :

1) *Tous les nombres entiers naturels.*
2) *Tous les nombres pairs.*
3) *Tous les nombres impairs.*

✍ Application ① :

Soient a *et* b *deux nombres de* $\mathbb{N}$ $(a \geq b)$. *Compléter le tableau suivant :*

Le nombre	a	b	$a+b$	$a-b$	$a\times b$
Parité	Pair	Pair			
	Pair	Impair			
	Impair	Pair			
	Impair	Impair			

✍ Activité ② :

1) *Cocher les cases convenables :*

	2	6	11	21	0	28	14	120
Multiple de 2								
Multiple de 3								
Multiple de 5								
Multiple de 9								

2) ***a)*** *- Déterminer* M_4 *l'ensemble de multiples de 4.*

b) *- Déterminer* M_6 *l'ensemble de multiples de 6.*

c) *- En déduire le plus petit commun multiple de 4 et 6 (On le note* $ppcm(4,6)$ *ou* $4 \vee 6$ *).*

✍ Application ② :

1) *Déterminer tous les multiples inférieure à 50 de 7.*
2) *Déterminer* $\text{ppcm}(5;3)$, $\text{ppcm}(12;18)$ *et* $\text{ppcm}(5;20)$.

✍ Exercice :

Soient a, b *et* c *trois entiers naturels.*

Montrer que si a *est multiple de* b *et* c, *alors il est un multiple de* $2b-3c$.

✍ Activité ③ :

1) *Cocher les cases convenables :*

	14	6	49	81	495
Divisible par 2					
Divisible par 3					
Divisible par 5					
Divisible par 7					
Divisible par 1					

2) ***a)*** *- Déterminer* D_{12} *l'ensemble de diviseurs de 12.*

b) *- Déterminer* D_{18} *l'ensemble de multiples de 18.*

c) *- En déduire le plus grand commun diviseur de 12 et 18 (On le note* $p\gcd(12,18)$ *ou* $12 \wedge 18$ *).*

✍ Application ③:

1) *Déterminer les diviseurs de* 24.
2) *Déterminer* $\text{pgcd}(8;6)$, $\text{pgcd}(6;26)$ *et* $\text{pgcd}(36;9)$.

✪ Exemple :

- *Le nombre* 74250 *est divisible par 2 et 5 car son chiffre des unités est 0.*
- *Le nombre* 74250 *est divisible par 3 et 9 car:* $7+4+2+5+0=18$ *est multiple de 3 et 9.*

✍ Activité ④ :

Déterminer D_2, D_3, D_5, D_{13} *et* D_{37}. *Que remarquer-vous ?*

✍ Application ④:

1) *Trouver les nombres premiers parmi les nombres suivants: 17, 45, 9, 41, 27, 11, 29.*
2) *Montrer que le nombre* 1000701 *n'est pas premier.*

✪ Exemple :

Montrons que 97 *est un nombre premier.*

On a: $\sqrt{97} \prec 10$. *Les nombres premiers inférieurs strictement à 10 sont : 2, 3, 5 et 7.*

Puisque 97 *n'est pas divisible par les nombres* 2, 3, 5 *et* 7, *alors il est premier.*

✍ Application ⑤:

Décomposer en produits de facteurs premiers: 12, 3520, 4576.

✪ Exemples :

- ✓ *On a* $p\gcd(5,13)=1$, *donc 5 et 13sont premiers entre eux.*
- ✓ *On a* $p\gcd(12,30)=6$, *donc 5 et 13 ne sont pas premiers entre eux.*

✍ Application ⑥ :

Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres 123 et 595 puis déduire qu'ils sont premiers entre eux.