Barycentre : exemples - exercices

1 Barycentre de deux points pondérés

Exemple 1 :

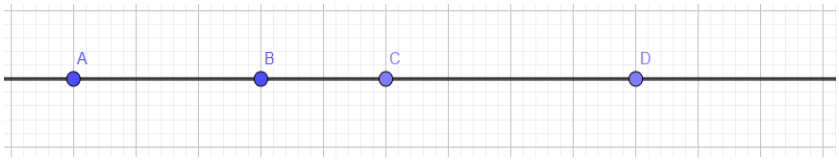
Soit A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[A;B]$. Montrer que I est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;1)$

♣ Solution

I étant le milieu du segment $[A;B]$, donc I vérifier l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$, c-à-d : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$, ainsi le résultat .

Exemple 2 :

On considère les points A, B, C et D de la droite graduée ci-dessous :



Déterminer les barycentres respectifs G_1, G_2 et G_3 des systèmes :

$\{(A,2),(C,3)\}$; $\{(B,2),(C,-3)\}$ et $\{(B,5),(C,-3)\}$

♣ Solution

1. Déterminons G_1 :

   On a $2+3=5\neq 0$, donc G_1 existe . Ainsi On a $\overrightarrow{AG_1} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$, et avec $\frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$ donc :$\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{AB}$, par suite G_1 est confondu avec B , c-à-d : $G_1 = B$.

2. Déterminons G_2 :

   On a $2-3=-1\neq 0$, donc G_2 existe. Ainsi $\overrightarrow{BG_2} = 3\overrightarrow{BC}$, et on a $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BC}$, donc : $\overrightarrow{BG_2} = \overrightarrow{BD}$, par suite G_2 est confondu avec D , c-à-d : $G_2 = D$.

3. Déterminons G_3 :

   On a $5-3=2\neq 0$, donc G_3 existe. Ainsi $\overrightarrow{CG_3} = \frac{5}{2}\overrightarrow{CB}$, et on a $\frac{5}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$, donc : $\overrightarrow{CG_3} = \overrightarrow{CA}$, par suite G_3 est confondu avec A , c-à-d : $G_3 = A$.

Exemple 3 :

Soit G le barycentre des points pondérés $(A,-\sqrt{3})$ et $(B,\sqrt{27})$. Vérifier que G est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;-3)$

♣ Solution

On a G est le barycentre des points pondérés $(A,-\sqrt{3})$ et $(B,\sqrt{27})$ Donc : $-\sqrt{3}\overrightarrow{GA} + \sqrt{27}\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, en multipliant les deux membres de l'égalité par $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ on aura : $\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, d'où le résultat .

2 Barycentre de trois points pondérés

Exemple 1 :

Soit ABC un triangle et G un point du plan tel que : $3\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{CG}$.

Montrer que G est le barycentre des points pondérés $(A,5)$, $(B,-3)$ et $(C,1)$

♣ Solution

On a $3\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{CG} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{GC} = 5\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{CG} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{GC} - 5\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{CG} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BG} - \overrightarrow{CG} - 5\overrightarrow{AG} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 5\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ d'où le résultat voulu .

Exemple 2 :

Soit ABC un triangle isocèle en C et G le barycentre du système pondéré : $\{(A,1),(B,1)(C,-1)\}$.

1. Construire le barycentre H du système pondéré $\{(A,1),(B,1)\}$.
2. Montrer que G est le barycentre de $\{(H,2),(C,-1)\}$ et construire G.
3. Déterminer la nature du quadrilatère $ACBG$

♣ Solution

1. Construire le barycentre H :
   On a H le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,1)$ donc H est le milieu du segment $[AB]$
2. Montrer que G est le barycentre de $\{(H,2),(C,-1)\}$ et construire G.
   On a H le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,1)$ et G le barycentre des points pondérés $(A,1)$; $(B,1)$ et $(C,-1)$ donc G est le barycentre des points pondérés $(H,2)$ et $(C,-1)$ d'après l'associativité du barycentre .
   Construisons le point G .
   G est le barycentre des points pondérés $(H,2)$ et $(C,-1)$ donc : $\overrightarrow{HG} = \frac{-1}{2-1}\overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HC}$, donc H est le milieu du segment $[CG]$
3. Déterminer la nature du quadrilatère $ACBG$ On a H est le milieu des deux segments $[AB]$ et $[CG]$. donc $ACBG$ est un parallélogramme et comme le triangle ABC est isocèle en C, alors $ACBG$ est un losange .

3 Les coordonnées du barycentre

Exemple 1 :

Soit $A(2;-3)$, $B(-1;1)$ et $C(-2;1)$ trois points du plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Déterminer les coordonnées du point G barycentre des points pondérés $(A,3)$ et $(B,-1)$ et construire G .
2. Déterminer les coordonnées du point H barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,-2)$ et$(C,3)$ puis construire H .

♣ Solution

1. Déterminons les coordonnées du point G :

On a G est le barycentre des points pondérés $(A,3)$ et $(B,-1)$ donc :
$x_G = \dfrac{3\times 2+(-1)\times(-1)}{3+(-1)} = \dfrac{7}{2}$ et $y_G = \dfrac{3\times(-3)+(-1)\times 1}{3+(-1)} = -5$, ainsi $G(\frac{7}{2};-5)$

2. Déterminons les coordonnées du point H .

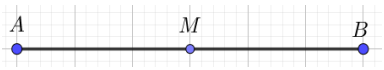
On a H est le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,-2)$ et$(C,3)$ donc :
$x_H = \dfrac{1\times 2+(-2)\times(-1)+3\times(-1)}{1+(-2)+3} = -1$ et $y_G = \dfrac{1\times(-3)+(-2)\times 1+3\times 1}{1+(-2)+3} = -1$, ainsi $H(-1;-1)$

4 Ensemble des points

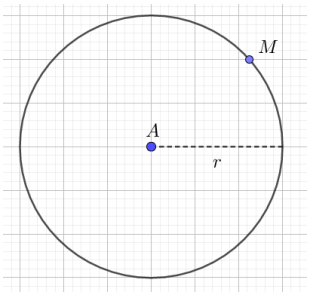
Ensemble des points :

Soit A , B , M et G trois points du plan et $r \in \mathbb{R}$.

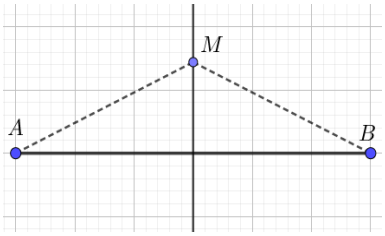
1. $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} \iff M$ est le milieu du segment $[A,B]$



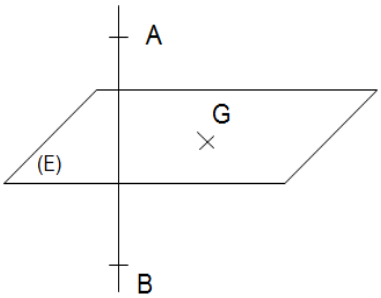
2. $\|\overrightarrow{MA}\| = r \Leftrightarrow MA = r \iff M$ appartient au cercle de centre A et de rayon r



3. $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\| \Leftrightarrow MA = MB \iff M$ appartient à la médiatrice du segment $[A,B]$.



4. $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff (E)$ est le plan orthogonal à (AB) passant par G



5 Exercices

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer les réels a et b pour que G soit le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b) :

1) $3\overrightarrow{AG}+4\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ 2) $2\overrightarrow{GA}-5\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$

Exercice 2 :

Soit A , B et G trois points du plan tel que : $\overrightarrow{BG}=3\overrightarrow{AB}$.

1. Construire le point G .
2. Déterminer le réel b pour que G soit barycentre du système pondéré : $\{(A,2);(B,b)\}$

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB=4cm$ et G le barycentre du système pondéré : $\{(B,2);(C,-1)\}$

1. Soit M un point du plan, Exprimer le vecteur $2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MG}$.
2. Préciser la nature de l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=2$,et construire E

Exercice 4 :

Soit A et B deux points distincts du plan .

Déterminer l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :

1) $\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\|=\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|$ 2) $\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\|=3$

Exercice 5 :

Déterminer trois réels a , b et c pour que G soit un barycentre des points pondérés (A,a) ; (B,b) et (C,c) dans chacun des cas suivants :

1) $\overrightarrow{BG}=3\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{GC}$ 2) $\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CG}-5\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ 3) $3\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{CB}+6\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$

Exercice 6 :

On considère dans le plan muni d'un repère , les points $A(1;2)$, $B(1;-3)$ et $C(5;1)$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$, a quelle condition existe-t-il un point G barycentre du système pondéré $\{(A,x-1);(B,3-2x);(C,3x)\}$.
2. On pose $x=3$, calculer les coordonnées x_G et y_G du point G .

Exercice 7 :

Soit $ABCD$ un rectangle, E le centre de gravité du triangle ABC et F le barycentre des points pondérés $(D,3)$ et $(C,1)$

1. Faire un figure
2. Soit G le milieux du segment $[ED]$ et I le milieu du segment $[AB]$, montrer que $G\in(IF)$
3. Soit K un point du plan définie par : $4\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{AD}$
   (a) Déterminer α et β pour que K soit le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β)

(b) Soit J le milieu du segment $[BC]$, montrer que J , G et K sont alignés .

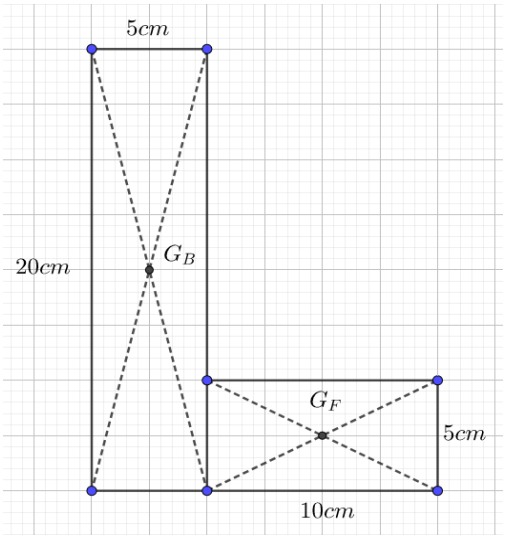
Exercice 8 :

Soit ABC un triangle et A', B', C' sont respectivement les milieux des segments $[BC]$, $[CA]$, et $[AB]$.

1. Justifier l'existence d'un point G vérifiant l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
2. Montrer que : $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{GC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$
3. (a) En déduire que les droites (AA') , (BB') et (CC') passant par le point G .
   (b) Que présente le point G pour le triangle ABC ?
4. Soi A" le milieux du segment $[AA']$
   (a) Montrer que A" est le milieux du segment $[B'C']$
   (b) Justifier que le point G est aussi le centre de gravité du triangle $A'B'C'$
   (c) Représenter graphiquement les résultats.

Exercice 9 :

Une équerre est constituée par un parallélépipède en bois fixé à une lame de fer. Le centre d'inertie de chaque partie (G_B et G_F) est dans le plan représenté ci-après. Les sections des deux parties sont rectangulaires, le centre d'inertie de chaque rectangle est son centre (c'est à dire le point d'intersection des diagonales).
On donne les dimensions en cm sur la figure et les masses :
↪ masse de la partie en bois : $m_b = 200$ g ↪ masse de la partie en fer $m_f = 300$ g



On note G le barycentre de $\{(G_B, m_b); (G_F, m_f)\}$.

1. Calculer la distance G_BG_F , puis la distance G_BG.
2. Construire, sur une figure à l'échelle, le centre d'inertie G de l'équerre

Taher Bouyguir

Bon Courage