Série des exercices - Calcul intégral

Exercice $n°1$:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ par : $f(x)=\frac{3x+1}{x^2-1}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{3x+1}{x^2-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$
2. En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$

♠ Solution

1. Pour tout x dans $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ on a :

$$\frac{3x+1}{x^2-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}=\frac{(x-1)a+(x+1)b}{x^2-1}=\frac{(a+b)x+(b-2)}{x^2-1}$$

Par identification des coefficients des deux polynômes $(a+b)x+(b-2)$ et $3x+1$, on trouve $a+b=3$ et $a-b=1$, d'où $a=2$ et $b=1$.

2. Calculons l'intégral : $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$

on a $f(x)=\frac{3x+1}{x^2-1}$ et la fonction rationnelle $x\mapsto\frac{3x+1}{x^2-1}$ est continue sur son ensemble de définition $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, en particulier sur $[2;3]$ on a donc :

$$\int_2^3\frac{3x+1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_2^3\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=2\int_2^3\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=2\left[ln(x-1)\right]_2^3+\left[ln(x+1)\right]_2^3=$$
$$2[ln(2)-ln(1)]+ln(4)-ln(3)=ln(4)+ln(4)-ln(3)=2ln(4)-ln(3)=ln(\frac{16}{3})$$

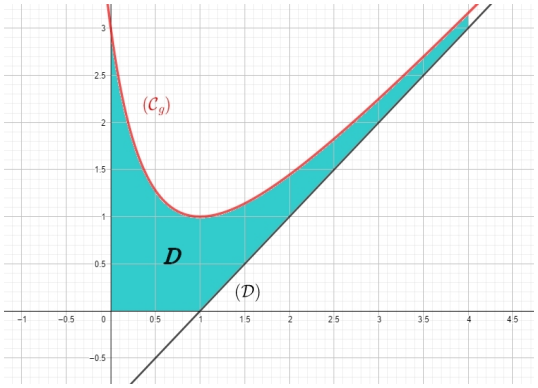
Exercice $n°2$:

Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-1+\frac{4}{(x+1)^2}$$

$(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative tracée ci-contre dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

Déterminer, en unité d'aire, l'aire A du domaine D délimité par la courbe $(\mathcal{C}_g)$, son asymptote oblique $(\mathcal{D})$ d'équation $y=x-1$ et les deux droites d'équations $x=0$ et $x=4$.



♠ Solution

Soit $x\in]-1;+\infty[$ étudions d'abord le signe de la différence $h(x)=g(x)-(x-1)$, on a

$$h(x)=g(x)-(x-1)=x-1+\frac{4}{(x+1)^2}-x+1=\frac{4}{(x+1)^2}\geq 0$$

On déduit alors que cette différence est positive ,en particulier sur $[0;4]$.

L'aire du domaine D est donc donné par la valeur de l'intégrale $\int_0^4\frac{4}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$ en effet :

une primitive H sur $[0;4]$ de la fonction h , (il existe par critère de continuité) est définie par $H(x)=-\frac{4}{x+1}$,

par suite : $\int_0^4\frac{4}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\left[\frac{-4}{x+1}\right]_0^4=H(4)-H(0)=\frac{16}{5}$

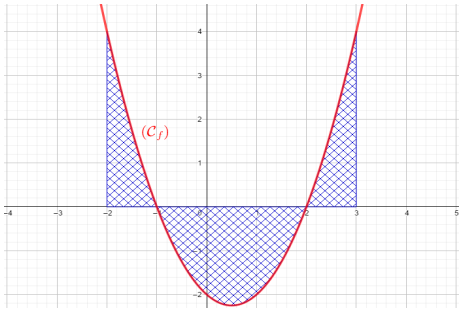
Exercice $n°3$:

Soit f la fonction définie sur $[-2;3]$ par :

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

$(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative tracée ci-contre dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Déterminer la mesure, en unité d'aire, de l'aire du domaine D délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$.



♠ Solution ▸ *Signe de l'expression : $x^2 - x - 2$*

Il s'agit dans ce cas, d'un trinôme du second degré, dont le discriminant est : $\triangle = b^2 - 4ac = 9$ donc l'équation $x^2 - x - 2 = 0$ a deux solutions réelles -1 et 2. Par suite,le signe de $x^2 - x - 2$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

▸ *Mesure de l'aire du domaine D*

Comme on a vu la fonction f change sa signe sur l'intervalle $[-2;3]$ donc la mesure , en unité d'aire du domaine D donné par l valeur de l'intégrale I :

$$I = \int_{-2}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} f(x)\mathrm{d}x$$

Une primitive de F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$, donc

$$I = [F(x)]_{-2}^{-1} - [F(x)]_{-1}^{2} + [F(x)]_{2}^{3} = [F(-1) - F(-2)] - [F(2) - F(-1)] + [F(3) - F(2)] = \frac{49}{6}$$

Ainsi, l'aire du domaine D est $\frac{49}{6}(u.a)$

Exercice $n°4$:

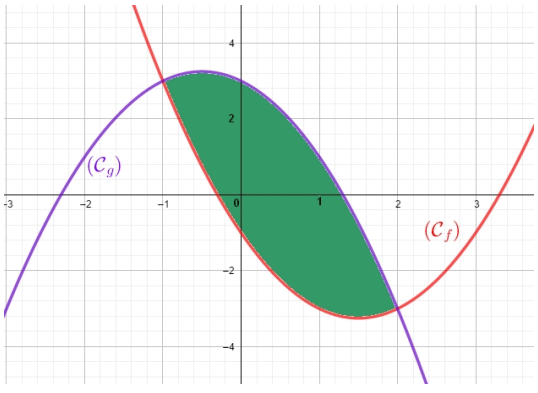
on considère un repère orthogonal avec les caractéristiques suivantes :

L'unité est : $1cm$ sur l'axe des abscisses , et $0.5cm$ sur l'axe des ordonnées.

f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x - 1 \text{ et } g(x) = -x^2 - x + 3$$

Déterminer en cm^2, l'aire du domaine D compris entre les deux courbes représentatives $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$, et les deux droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.



♠ Solution

On commence par étudier la position relative des deux courbes en étudiant le signe de la différence suivante :

$$T = f(x) - g(x) \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}$$

Il s'agit donc du signe d'un trinôme du second degré $T = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x^2 - x - 2)$. Or cette différence

est nulle pour $x = -1$ et $x = 2$, et elle est de signe constant (négative) entre ces de valeur .donc $\forall x \in [-1;2]$ $T = f(x) - g(x) \leq 0$ alors $\forall x \in [-1;2]$: $|f(x) - g(x)| = g(x) - f(x)$, donc : En unité d'aire , l'aire du domaine D est donc mesuré par :

$$\int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)|\,dx = \int_{-1}^{2} g(x) - f(x)dx = 2\int_{-1}^{2}(-x^2 + x + 2)dx = 2\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = 9$$

Ainsi, l'aire du domaine D est $A = 9(u.a) = 9 \times 1 \times 0.5cm^2 = 4.5cm^2$

Exercice $n°5$:

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^{2} 5x + 2dx$ b) $\int_{0}^{6} x^2 + x - 2dx$ c) $\int_{1}^{3} 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

d) $\int_{0}^{1} \frac{5x^3 - 2x}{x}dx$ e) $\int_{2}^{5} \frac{t^2}{4} - \frac{2}{t^2}dt$ f) $\int_{1}^{2020} (u + \frac{1}{u^4})du$

g) $\int_{0}^{3} x^2(x^2 + 1)dx$ h) $\int_{-1}^{3} (6y + 1)(3y^2 + y - 12)dy$ i) $\int_{2}^{\pi} (t^4 + t^3 + 1)(\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 + t)dt$

j) $\int_{0}^{4} \frac{2u - 1}{(u^2 - u)^2}du$ k) $\int_{1}^{4} \frac{1}{(x-1)^{11}}dx$ l) $\int_{2}^{5} \frac{2}{(t + 2020)^4}dt$

m) $\int_{4}^{8} \frac{x}{x^2 + 9}dx$ n) $\int_{2}^{1} \frac{1}{\sqrt{2x - 1}}dx$ o) $\int_{3}^{1} \frac{2}{2x - 1}dx$

p) $\int_{0}^{1} \frac{1}{3u + 1}du$ q) $\int_{-1}^{1} \frac{-1}{4 - u}du$ r) $\int_{0}^{1} \frac{2x + 1}{x^2 + x + 2}dx$

s) $\int_{0}^{7} \frac{x^2 + 3}{x^3 + 6x}dx$ t) $\int_{0}^{7} \frac{5x^4 + 6}{x^5 + 6x}dx$ u) $\int_{50}^{50} \frac{1}{u^{1000}}du$

Exercice $n°6$:

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{1}^{e} \frac{ln(x)}{x}dx$ b) $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{xln(x)}dx$ c) $\int_{ln2}^{ln5} -e^x dx$

d) $\int_{0}^{2} 2e^{2x-1}dx$ e) $\int_{0}^{1} e^{-\frac{3}{2}}dt$ f) $\int_{0}^{2} (2u - 2)e^{u^2 - 2u + 2020}du$

g) $\int_{1}^{ln2} (3x^2 + 6x - 1)e^{x^3 + 3x^2 - x}dx$ h) $\int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}}dt$ i) $\int_{1}^{ln2} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}dt$

j) $\int_{ln2}^{4} (x + e^x)dx$ k) $\int_{0}^{4} e^x(e^x + 1)^2 dx$ l) $\int_{0}^{ln3} (e^{-t} + 3t)dt$

m) $\int_{0}^{ln3} e^{-x}(e^x + 2)dx$

Exercice $n°7$:

1. Montrer que pour tout x de $]-2;2[$ on a :

$$\frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}$$

2. En déduire la valeur de

$$I = \int_{-2}^{2} \frac{4}{4 - x^2}dx$$

f fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+x}$

1. Montrer que pour tout x de $]0;+\infty$ on a :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

2. En déduire la valeur de

$$I = \int_{1}^{2} f(x)dx$$

Exercice $n°8$: Relation de Chasles

Calculer les intégrales suivantes :

1. $A = \int_0^2 |2x-1|\,\mathrm{d}x$
2. $B = \int_{-2}^1 \left|\frac{1}{2}x^2 + 4x\right|\mathrm{d}x$
3. $C = \int_{-2}^2 (|x+1| + |x-1|)\mathrm{d}x$

f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - x & \text{si } x \geq 1 \\ e^x - e & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en 1
2. Calculer $I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

Exercice $n°9$: Intégration par parties

En utilisant l'intégration par parties calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^{2e} x\ln(x)\mathrm{d}x$ b) $\int_0^{e^2} (x-2)\ln(x)\mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 (x+5)e^x\mathrm{d}x$

d) $\int_0^1 xe^{3x}\mathrm{d}x$ e) $\int_0^1 t^2e^{-t}\mathrm{d}t$ f) $\int_1^e \frac{\ln(u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$

Exercice $n°10$: Calcul d'aire

I). f est une fonction définie sur $[a;b]$, $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, Calculer l'aire de la région du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les deux droite d'équation $x = a$ et $x = b$

a) $f(x) = x^2 + x + 1$; $a = 0$ et $b = 1$

b) $f(x) = \frac{2}{x}$; $a = 2$ et $b = 4$

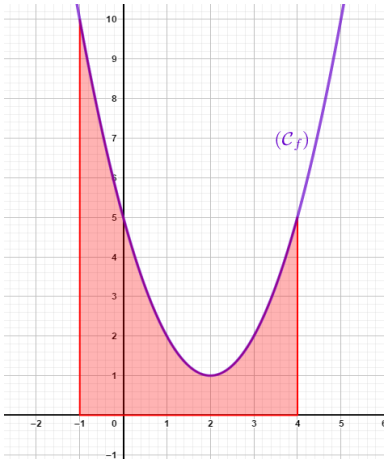
c) $f(x) = e^{2-x}$; $a = -2$ et $b = 1$

d) $f(x) = \frac{2}{x+1}\ln(x+1)$; $a = 0$ et $b = 2$

II). f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (figure ci-dessous)

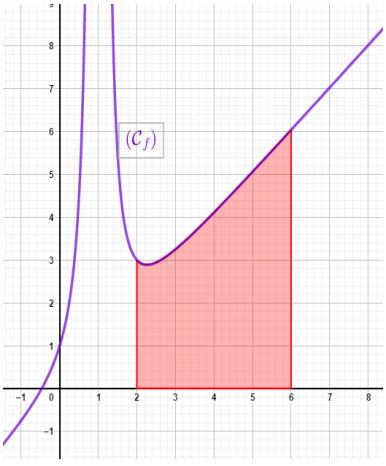


Calculer l'aire de la partie colorée .

III). f fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{(1-x)^2}$$

$(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (figure ci-dessous)

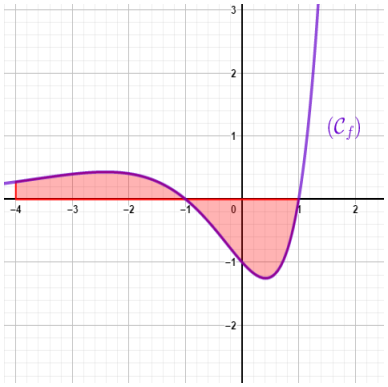


Calculer l'aire de la partie colorée .

IV). f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

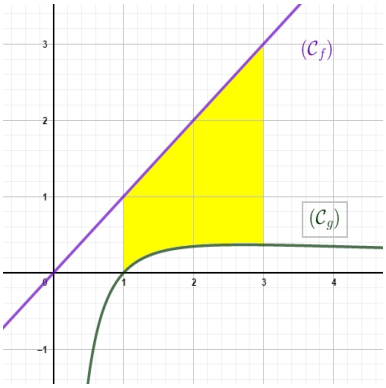
$$f(x) = (x^2 - 1)e^x$$

$(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (figure ci-dessous)



Calculer l'aire de la partie colorée .

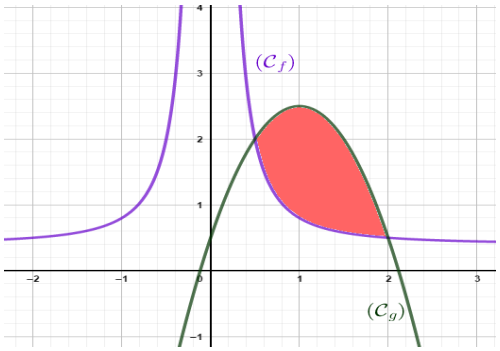
V). f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{ln(x)}{x}$ et soient $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ leurs représentation dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (figure ci-dessous)



Calculer l'aire de la partie colorée .

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2}{5}(1 + \frac{1}{x^2})$ et $g(x) = -2(x-1)^2 + \frac{5}{2}$.
Soient $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ leurs représentation dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (figure ci-contre).

Calculer l'aire de la partie colorée .



Exercice $n°11$: Exercices approfondis

I). f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 2}$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\})$, : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$.
2. En déduire la valeur de : $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

II). g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction G définie par : $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ soit une primitive de g sur $\mathbb{R}$
2. En déduire la valeur de : $I = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$

III).

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$, on a :
$$\frac{e^{2x}}{1 + e^x} = e^x - \frac{e^x}{1 + e^x}$$
2. En déduire la valeur de : $I = \int_0^{ln2} \frac{e^{2x}}{1 + e^x}\mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{ln2} \frac{e^x}{1 + e^{-x}}\mathrm{d}x$

IV).

1. Vérifier que $(\forall x \in [1; +\infty[)$: $\frac{2}{x^2+2x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$
2. Calculer : $H = \int_1^2 \frac{2}{x^2 + 2x}\mathrm{d}x$
3. En utilisant l'intégration par parties calculer : $L = \int_1^2 \frac{ln(x)}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$

Exercice $n°12$: Exercices approfondis

I). f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + ln(x)}{x^2}$$

.

$(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = x - 1$

1. En utilisant l'intégration par parties montrer que : $\int_e^1 \frac{ln(x)}{x^2} \mathrm{d}x = \frac{2}{e} - 1$
2. Calculer l'aire délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite $(\mathcal{D})$ et les deux droite d'équation $x = 1$ et $x = e$

II). g une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$g(x) = x - (ln(x))^2$ et $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = x$

1. Montrer que $G(x) = xln(x) - x$ est une primitive de la fonction $ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que $\int_1^e ln(x) \mathrm{d}x = 1$
2. En utilisant l'intégration par parties montrer que : $\int_1^e (ln(x))^2 \mathrm{d}x = e - 2$.
3. Calculer l'aire délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_g)$, la droite $(\mathcal{D})$ et les deux droite d'équation $x = 1$ et $x = e$

Bon Courage