Série des exercices 06 : Trigonométrie

Exercice 1 :

Soit x un réel. Simplifier les expressions suivantes :

a) $A = cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ b) $B = sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$

c) $C = \sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 2 :

Questions indépendantes

1. En utilisant $cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, calculer $cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$, puis déduire $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$
2. Calculer $sin(2x)$ sachant que : $sin(x) = \frac{1}{3}$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, Exprimer sous forme de produit les expressions suivantes :

   a) $A = sin(2x) - sin(6x)$ b) $B = cos(3x) + cos(5x)$

   c) $C = sin(7x) + sin(3x)$ d) $D = cos(6x) - cos(8x)$

4. (a) Vérifier que : $\frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, puis calculer $tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

   (b) Vérifier que : $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, puis calculer $tan\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

   (c) On pose : $tan(x) = \frac{-1}{4}$. Calculer $tan(2x)$
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Transformer en produit les expressions suivantes :

   a) $A = \sqrt{3}cos(x) + sin(x)$ b) $B = cos(x) - \sqrt{3}sin(x)$ c) $C = cos(x) + sin(x)$

Exercice 3 :

1. Soit a , $b \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que : $sin(a) = \frac{2}{5}$ et $cos(b) = \frac{3}{5}$. Calculer $sin(a+b)$ et $cos(a+b)$
2. Soit a , $b \in [0; \pi]$ tels que : $cos(a) = \frac{-1}{3}$ et $cos(b) = \frac{2}{3}$. Calculer $cos(a-b)$ et $sin(a-b)$
3. Soit a , $b \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tels que : $sin(a) = \frac{-\sqrt{2}}{4}$ et $sin(b) = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Calculer $cos(a-b)$ et $sin(a+b)$

Exercice 4 :

1. Soit $a \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $sin(a) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, calculer $cos(2a)$ puis déduire la valeur de a .
2. Soit $b \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $cos(b) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, Montrer que $cos(2b) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ puis comparer $cos(4b)$ et $cos(b)$ et déduire la valeur de b .

Exercice 5 :

1. Montrer que $\left(\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right) : \frac{sin(3x)}{sin(x)} - \frac{cos(3x)}{cos(x)} = 2$ et $\frac{1+cos(2x)+sin(2x)}{1-cos(2x)+sin(2x)} = \frac{1}{tan(x)}$
2. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}) : \frac{sin(8x)}{8sin(x)} = cos(x)cos(2x)cos(4x)$
   (b) Déduire les valeurs de : $A = cos\left(\frac{\pi}{7}\right)cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$ et $B = cos\left(\frac{\pi}{9}\right)cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

Exercice 6 :

1. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : cos(5x) = cos(x)(16cos^4(x) - 20cos^2(x) + 5)$
   (b) Déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) : 1 - cos(5x) = (1 - cos(x))(4cos^2(x) + 2cos(x) - 1)^2$
2. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $4X^2 + 2X - 1 = 0$
   (b) Déduire les valeurs des nombres : $cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

Exercice 7 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   a) $sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{2}$ c) $sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$
   d) $cos(x) = sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ e) $3tan(x) - \sqrt{3} = 0$ f) $sin(x) + cos(x) = 0$
   g) $sin(x) - cos(x) = 0$ h) $sin(x) - \sqrt{3}cos(x) = 0$ i) $\sqrt{3}sin(x) + cos(x) = 0$
2. Résoudre dans $I =]-\pi;\pi]$ puis dans $J = [0;2\pi[$:
   a) $sin(x) = -cos(\frac{\pi}{9})$ b) $2cos(x) + 1 = 0$ c) $tan^2(x) - 1 = 0$
3. Résoudre dans $I =]-\pi;\pi]$ puis dans $J = [0;2\pi[$:
   a) $2sin(x) - \sqrt{3} < 0$ b) $3tan(x) + \sqrt{3} \leq 0$ c) $sin(x) \leq \frac{\pi}{3}$
   d) $cos(x) + cos(\frac{7\pi}{13}) \geq 0$ e) $cos(x) \leq -\frac{22}{7\pi}$ f) $cos(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$
   g) $sin(x) + cos(\frac{3\pi}{11}) < 0$ h) $\sqrt{6}tan(x) + \sqrt{2} \leq 0$

Exercice 8 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $B(x) = \sqrt{3}cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

1. Montrer que : $B(x) = 2cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ puis résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation $B(x) = 1$

Exercice 9 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $A(x) = \sqrt{3}sin^3(x) + sin^2(x)cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}sin(x) - \frac{1}{2}cos(x)$

1. Montrer que :$(\forall x \in \mathbb{R})$; $A(x) = (2sin^2(x) - 1)cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $2sin^2(x) - 1 = 0$ et $cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

3. En déduire les solution de l'équation $A(x) = 0$ dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Exercice 10 :

On considère la fonction f définie sur $[0;\pi]$ par : $f(x) = \dfrac{sin(2x)}{1+cos(2x)}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1+cos(2x) = 0$ puis déduire $\mathcal{D}_f$
2. Montrer que $f(x) = tan(x)$, $(\forall x \in \mathcal{D}_f)$
3. Résoudre sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, l'inéquation $f(x) \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Exercice 11 :

Soit $x \in \mathbb{R}$ montrer les égalités suivantes :

a) $sin(3x) = sin(x)(4cos^2(x)-1)$

b) $(sin(x)+cos(x))^2 = 1+sin(2x)$

c) $sin(2x) = 1-2cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

d) $cos(3x) = cos(x)(4cos^2(x)-3)$

Exercice 12 :

Soit x, y et z les mesures des angles d'un triangle non rectangle , établir les égalités suivantes :

a) $tan(x)+tan(y)+tan(z) = tan(x)tan(y)tan(z)$

b) $cos^2(x)+cos^2(y)+cos^2(z)-1 = -2cos(x)cos(y)cos(z)$

c) $\dfrac{cos(x)}{sin(y)sin(z)}+\dfrac{cos(y)}{sin(x)sin(z)}+\dfrac{cos(z)}{sin(x)sin(y)} = 2$

d) $sin(x)+sin(y)+sin(z) = 4cos(\frac{x}{2})cos(\frac{y}{2})cos(\frac{z}{2})$

Exercice 13 :

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{2-(\sqrt{3}cos(x)+sin(x))}{\sqrt{3}sin(x)-cos(x)}$

1. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $\sqrt{3}sin(x)-cos(x) = 2sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ et déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $2-(\sqrt{3}cos(x)+sin(x)) = 4sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right)$
3. Déduire que $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f(x) = tan\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right)$
4. Résoudre dans $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation : $f(x) \leq 1$

Exercice 14 :

1. Soit a et b deux réels tels que : $a \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ et $b \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, vérifier que : $tan(a)+tan(b) = \dfrac{sin(a+b)}{cosacosb}$
2. Déduire la valeur de : $A = tan\dfrac{\pi}{20}-tan\dfrac{3\pi}{20}-tan\dfrac{7\pi}{20}+tan\dfrac{9\pi}{20}$

Exercice 15 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $cos2x - \sqrt{3}sin2x = 1$ puis résoudre dans $[-\pi;\pi[$: $cos2x - \sqrt{3}sin2x \geqslant 1$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2} + 1 = 0$ puis résoudre dans $[-\pi;\pi[$: $cos\frac{x}{2} + sin\frac{x}{2} + 1 \geqslant 0$

Exercice 16 :

1. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $2cos(3x) + \sqrt{3}sinx + cosx = 4cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

   (b) Résoudre dans $\left]\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right[$ l'inéquation : $2cos(3x) + \sqrt{3}sinx + cosx > 0$.
2. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $sin(5x) + cos(5x) - \sqrt{2}cos(13x) = 2\sqrt{2}sin\left(4x + \frac{\pi}{8}\right)sin\left(9x - \frac{\pi}{8}\right)$

   (b) Résoudre dans $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ l'inéquation :$sin(5x) + cos(5x) - \sqrt{2}cos(13x) \leqslant 0$
3. Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation :$sinx + sin(2x) + sin(3x) > 0$

Exercice 17 :

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $cos(3x) = cosx(4cos^2(x) - 3)$.
2. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $4cosxcos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = cos(3x)$

   (b) Déduire que : $cos\frac{\pi}{9}cos\frac{2\pi}{9}cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$
3. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $2cos^2(x) - sin(2x) = 2\sqrt{2}cosxsin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2cos^2(x) - sin(2x) = 0$

   (c) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation : $\frac{cos(3x) + 2cos(x)}{2cos^2(x) - sin(2x)} \geq 0$

Exercice 18 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la suite (u_n) telle que : $u_n = \sum_{k=1}^{n} cos(k\alpha)$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

1. Calculer $2sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)u_n$ puis déduire une simple expression de u_n .
2. On considère la suite (v_n) telle que : $v_n = \sum_{k=1}^{n} cos^2(k\alpha)$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$
   Donner une simple expression de v_n .
3. On considère les deux suites (w_n) et (t_n) telle que : $w_n = \sum_{k=1}^{n} sin(k\alpha)$ et $t_n = \sum_{k=1}^{n} sin^2(k\alpha)$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$
   Donner une simple expression de w_n et t_n .

Exercice 19 :

Soit $x \in]0;2\pi[$, on considère la suite (u_n) telle que : $u_n = \prod_{k=1}^{n} cos\frac{x}{2^k}$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

1. Montrer que $(\forall a \in]0;\pi[)$, $cosa = \frac{sin2a}{2sina}$ et déduire que : $u_n = \frac{sinx}{2^n sin\frac{x}{2^n}}$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Exercice 20 :

On considère la suite (u_n) telle que : $u_n = \sum_{k=1}^{n} sin\left(\frac{1}{n+k}\right)$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, montrer que cette suite est croissante .