Exercice 1

A, B et C sont trois points non alignés.
Exprimer, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ seulement, les vecteurs :
- $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$.
- $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

Exercice 2

A, B, C et D sont quatre points du plan.
Montrer que : $\begin{cases} \bullet\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} \\ \bullet\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \end{cases}$

Exercice 3

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.
Montrer que tous ces vecteurs sont nuls.
- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.
- $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{DO}$.
- $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

Exercice 4

Soient A, B, C et M quatre points du plan et soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur défini par : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$.

① Montrer que : $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

② Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur défini par : $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{BA} - 6\overrightarrow{BC}$.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Exercice 5

$ABCD$ est un parallélogramme et M le point du plan tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$.

① Montrer que B, C et M sont alignés.

② En déduire que C est le milieu du segment $[BM]$.

Exercice 6

ABC est un triangle et I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$ respectivement.
Montrer que : $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Exercice 7

ABC est un triangle et G son centre de gravité $(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0})$ et O est le milieu de $[BC]$.
Montrer que : $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OG} \\ -2\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \end{cases}$

Exercice 8

$ABCD$ est un parallélogramme.

① placer le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

② placer le point N tel que : $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$.

③ Montrer que $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{NM} = \frac{9}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

④ En déduire que $(MN)//(CM)$.

Exercice 9

$ABCD$ est parallélogramme.
On considère M et N les points du plan tels que : $\overrightarrow{DM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.

① Montrer que : $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$.

② *a*. Calculer $\overrightarrow{BM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
b. Calculer $\overrightarrow{BN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

③ Montrer que : $2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 10

ABC est un triangle.
On considère I et J et les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$ respectivement.

① Montrer que : $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

② Soient M et N deux points du plan tels que : $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CI}$.
a. Quelle est la nature de quadrilatères $ACBN$ et $ABCM$? justifier votre réponse.
b. Montrer que les points A, M et N sont alignés.

Exercice 11

$ABCD$ est un parallélogramme et M et N deux points du plan tels que : $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$.

① Construire une figure convenable.

② Montrer que : $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$.

③ Montrer que C, M et N sont alignés.

④ Soit E le milieu du $[DN]$ et soit F le point du plan tel que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BF}$.
Montrer que C est le milieu de $[EF]$.

⑤ Montrer que : $(BD)//(EF)$.

Exercice 12

$ABCD$ est un quadrilatère et x un réel.
On considère M et N deux points du plan tels que : $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DN} = x\overrightarrow{DC}$.

① Montrer que : $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{AD}$.

② On suppose que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$.
a. Quelle est la nature $ABCD$?
b. Calculer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.
c. Déterminer la valeur de x pour que $M = N$.