SÉRIE D'EXERCICES N° 2 | VERSION ÉLÈVE

1ère Spé Maths

Cercle trigonométrique

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Organisation de la série

Partie A – Radians (ex. 1 à 5)
Partie B – Points du cercle trigonométrique (ex. 6 et 7)
Partie C – Cosinus et sinus (ex. 8 à 10)
Partie D – Angles associés (ex. 11 à 14)
Partie E – Équations (ex. 15 à 17)

A Radians

Exercice 1 : Radians → degrés

Les mesures ci-dessous sont exprimées en radians ; les convertir en degrés (valeurs exactes).

$$\frac{3\pi}{5}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\ ;\ \frac{5\pi}{12}\ ;\ \frac{\pi}{16}\ ;\ 1\ ;\ \frac{11\pi}{120}$$

Exercice 2 : Degrés → radians

Les mesures ci-dessous sont exprimées en degrés ; les convertir en radians (valeurs exactes).

$$36°\ ;\ 15°\ ;\ 240°\ ;\ 270°\ ;\ 720°\ ;\ 105°\ ;\ 1°$$

Exercice 3 : La molécule d'eau

La molécule d'eau est formée de 3 atomes : 2 atomes d'hydrogène H et un atome d'oxygène O. L'angle formé par les 2 liaisons O–H mesure $104°$.

1. Déterminer la mesure en radians de l'angle de la liaison.
2. De manière générale, les mesures des angles des liaisons covalentes vont de $104°$ à $109{,}5°$. Déterminer l'intervalle correspondant en radians.

Exercice 4 : Angles d'un triangle

Dans chaque cas, exprimer en radians les mesures des trois angles α, β et γ d'un triangle tel que :

a) $\alpha = 70°$ et $\beta = 15°$;
b) le triangle est rectangle isocèle ;
c) le triangle est isocèle et $\alpha = 45°$;
d) le triangle est équilatéral.

Exercice 5 : Snowboard

Certaines figures de snowboard portent des noms qui correspondent à des mesures d'angles en degrés. Il y a le 180, le 270, le 360, le 450, le 630, le 720, le 810, le 900, le 1080, le 1260 et le 1440. Traduire ces figures en radians.

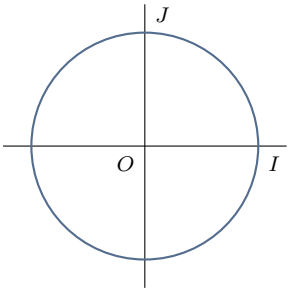
B Points du cercle trigonométrique

Exercice 6 : Placer des points

1. Placer sur le cercle trigonométrique les points images des réels :

$$\frac{\pi}{6}\ ;\ -\frac{3\pi}{4}\ ;\ \frac{5\pi}{3}\ ;\ \frac{7\pi}{2}\ ;\ -\frac{11\pi}{6}\ ;\ \frac{9\pi}{4}.$$

2. Deux de ces réels ont le même point image : lesquels ? Justifier par un calcul.



Exercice 7 : Se ramener à $]-\pi\,;\pi]$

Pour chaque réel, trouver le réel de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ qui a le même point image sur le cercle trigonométrique.

a) $\frac{25\pi}{6}$
b) $-\frac{17\pi}{4}$
c) $\frac{31\pi}{3}$
d) -45π
e) $\frac{102\pi}{5}$
f) $-\frac{14\pi}{2}$

C Cosinus et sinus

Exercice 8 : Lecture sur un cercle partagé

Le cercle trigonométrique est partagé régulièrement en 12 arcs égaux (pas de $\frac{\pi}{6}$). Pour chaque réel x, préciser le quart de cercle où se trouve son point image, puis donner $\cos x$ et $\sin x$.

a) $x = \dfrac{2\pi}{3}$

b) $x = -\dfrac{3\pi}{4}$

c) $x = \dfrac{11\pi}{6}$

d) $x = \dfrac{5\pi}{4}$

e) $x = -\dfrac{7\pi}{6}$

f) $x = \dfrac{13\pi}{3}$

Exercice 9 : Sinus connaissant le cosinus

Dans chaque cas, calculer la valeur exacte demandée.

a) $x \in [0\,;\pi]$ et $\cos x = -0{,}8$: calculer $\sin x$.

b) $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ et $\sin x = \dfrac{5}{13}$: calculer $\cos x$.

c) $x \in [-\pi\,;0]$ et $\cos x = \dfrac{1}{3}$: calculer $\sin x$.

d) $x \in \left[\pi\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ et $\sin x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$: calculer $\cos x$.

Exercice 10 : Lien avec le triangle rectangle

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 5$ et $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{6}$.

1. Donner $\cos\dfrac{\pi}{6}$ et $\sin\dfrac{\pi}{6}$.
2. Calculer les valeurs exactes de BC puis de AC.

D Angles associés

Exercice 11 : Valeurs exactes

Déterminer la valeur exacte de chaque nombre en utilisant les angles associés.

a) $\cos\dfrac{5\pi}{6}$

b) $\sin\dfrac{7\pi}{4}$

c) $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$

d) $\sin\dfrac{4\pi}{3}$

e) $\cos\dfrac{17\pi}{6}$

f) $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)$

Exercice 12 : Simplifier des expressions

Simplifier, pour tout réel x :

a) $A(x) = \cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + 2\cos(-x)$;

b) $B(x) = \sin(\pi - x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \sin(\pi + x)$;

c) $C(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \sin(-x) - \cos x$.

Exercice 13 : Comme au DST

Soit un réel $a \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\cos(a) = \dfrac{1}{3}$.

1. Donner, en justifiant, le signe de $\sin(a)$, puis calculer sa valeur exacte.
2. En déduire la valeur exacte de $\cos(\pi - a)$, $\sin(\pi + a)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right)$.

Exercice 14 : Sommes astucieuses

1. Montrer que $\cos\dfrac{6\pi}{7} = -\cos\dfrac{\pi}{7}$. En déduire la valeur de

$$S = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}.$$

2. Calculer $T = \cos^2\dfrac{\pi}{8} + \cos^2\dfrac{3\pi}{8}$. *(Indication : $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$.)*

E Équations

Exercice 15 : Équations dans $\mathbb{R}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin x = -1$

c) $\sin x = \dfrac{1}{2}$

d) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 16 : Équations sur un intervalle

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle indiqué.

a) $2\cos x - 1 = 0$ dans $]-\pi\,;\pi]$;

b) $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$ dans $[0\,;2\pi[$;

c) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$ dans $[0\,;4\pi[$;

d) $\cos x = 2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 17 : Avec le second degré

1. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $4\sin^2 x - 3 = 0$.
2. On pose $X = \cos x$. Résoudre $2X^2 - X - 1 = 0$, puis résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.