Série des exercices : Dérivation

Exercice n^o 1 .

Dans chacun des cas suivants, justifier que la fonction f est dérivable en a ,et déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a

1. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$; et $a = 2$
2. $f(x) = x^2 + x$; et $a = -1$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x - 2\sqrt{x}$; et $a = 4$
4. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$; et $a = 0$

Exercice n^o 2 .

f est la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-3} & \text{si } x > 3 \\ f(x) = x^2 - x - 6 & \text{si } x \leqslant 3 \end{cases}$$

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite et à gauche de 3.
2. Donner une interprétation géométrique du résultat obtenu ci-dessus.
3. Montrer que f est dérivable en 4, et que $f'(4) = \frac{1}{2}$, et donner une interprétation géométrique de ce résultat.
4. Donner une approximation du nombre $f(3,99)$.

Exercice n^o 3 .

Etudier la dérivabilité à droite et à gauche de a dans les cas suivants ,puis interpréter le résultat géométriquement :

1. $f(x) = x\,|x-1|$; et $a = 1$
2. $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$; et $a = 2$
3. $f(x) = 1 - x\,|x|$; et $a = 0$
4. $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$; et $a = 1$
5. $f(x) = x\sqrt{|x^2 + x|}$; et $a = -1$
6. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{si } x \geqslant 1 \\ x^2 + x - 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$; et $a = 1$
7. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-3} & \text{si } x > 4 \\ \frac{\sqrt{x}+12}{2x} & \text{si } x \leqslant 4 \end{cases}$; et $a = 4$

Exercice n^o 4 .

Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$ **2)** $f(x) = 2x^7 - 3$
3) $f(x) = 4x - \sqrt{x}$ **4)** $f(x) = -5x^2 + \frac{2}{x}$
5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ **6)** $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$
7) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ **8)** $f(x) = \frac{\sqrt{x}-x}{x^2+1}$
9) $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ **10)** $f(x) = (x^2-3)(4x^3-5)$
11) $f(x) = (3x^2 - 5x + 1)^4$ **12)** $f(x) = \sqrt{3x^2 - 5x + 1}$

Exercice n^o 5 .

En utilisant le nombre dérivé Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 4} \frac{x\sqrt{x}-8}{x-4}$ b) $\lim_{x\to -1} \frac{(x+2)^{2020}-1}{x+1}$
c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ d) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+2x+1}-3}{x-2}$

Exercice n^o 6 .

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2+4x+1}{x^2+2x}$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Calculer les limites suivantes :
   a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
   c) $\lim_{x\to(-2)^+} f(x)$ d) $\lim_{x\to(-2)^-} f(x)$
   e) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ f) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.
4. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathcal{D}_f$.
5. Déduire les variations, puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice n^o 7 .

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 5$$

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de g, puis dresser le tableau de variations.
3. Préciser les extremums locaux de g .

Exercice n^o 8 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$$

1. Calculer : $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$.
2. Déterminer les réels α , β et δ pour que l'on ait : $f'(x) = (x-1)(\alpha x^2 + \beta x + \delta)$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Déterminer le signe de la fonction f.
6. Montrer que la droite d'équation : $y = x - 1$ est une tangente à la courbe de f en deux point à déterminer .

Exercice n^o 9 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 4$$

1. Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative de la fonction f admet une tangente en chacun de ses points.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$
3. Interpréter géométriquement le résultat du question 2).
4. Déterminer les abscisses des points de $(\mathcal{C}_f)$ en lesquels la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ a un coefficient directeur égale à 3.
5. Existe-t-il points de $(\mathcal{C}_f)$ es lesquels la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ est parallèle à la droite d'équation : $y = cx + d$ (où c et d deux réels) ? Discuter en fonction de c .

Exercice n^o 10 .

Partie I

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{g}(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 4$$

1. Calculer les limites suivantes :
   a) $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\mathrm{g}'(x) = 6(x+1)^2$
3. Étudier le signe de $\mathrm{g}'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variation de g.
4. Calculer $\mathrm{g}(-2)$ et en déduire que : $(\forall x \in]-\infty;-2]) : \mathrm{g}(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [-2;+\infty[) : \mathrm{g}(x) \geq 0$.

Partie II

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 + 2x - \frac{2}{x+1}$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
3. Montrer que $(\forall x \in \mathcal{D}_f)$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$
4. Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f au point d'abscisse 0.
5. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathcal{D}_f$.
6. Donner le tableau de variations de la fonction f

Exercice n^o 11 .

Partie I

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{g}(x) = 2x + \sqrt{4x^2+1}$$

1. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\mathrm{g}(x)\cdot\mathrm{g}(-x) = 1$.
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$: $\mathrm{g}(x) > 0$
3. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^-)$: $\mathrm{g}(x) > 0$

Partie II

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}$$

Et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Calculer les limites suivantes :
   a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{4x^2+1}}$
3. En déduire le tableau de variations de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

Bon Courage