SÉRIE D'EXERCICES N° 4 | VERSION ÉLÈVE

1ère Spé Maths

Dérivation

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Organisation de la série

Partie A – Nombre dérivé et tangente (ex. 1 à 8)
Partie B – Approximation affine (ex. 9)
Partie C – Fonction dérivée (ex. 10 à 17)

A Nombre dérivé et équation de la tangente

Exercice 1 : Nombre dérivé par la définition (1)

En calculant la limite du taux de variation, montrer que f est dérivable en a et donner $f'(a)$.

a) $f(x) = 3x^2 + x$; $a = 2$

b) $f(x) = x^2 - 5$; $a = -1$

c) $f(x) = x^3$; $a = 1$

d) $f(x) = 5x - 2$; $a = 4$

Exercice 2 : Nombre dérivé par la définition (2)

Même consigne.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$; $a = 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$; $a = 1$

c) $f(x) = \sqrt{x+1}$; $a = 3$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$; $a = 0$

Indication pour c) : multiplier par la quantité conjuguée.

Exercice 3 : Dérivable ou non ?

Étudier la dérivabilité de f en a. Interpréter graphiquement lorsque f n'est pas dérivable.

a) $f(x) = |x - 3|$; $a = 3$

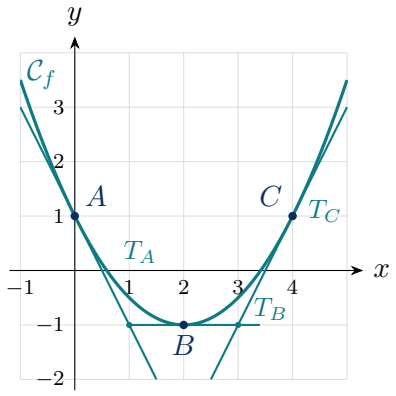
b) $f(x) = x + |x|$; $a = 0$

c) $f(x) = (x-1)\,|x-1|$; $a = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $a = 1$

Exercice 4 : Lecture graphique

On donne la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f et ses tangentes T_A, T_B, T_C aux points A, B, C.



1. Lire $f(0)$, $f(2)$ et $f(4)$.
2. Lire $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(4)$ en justifiant.
3. Déterminer les équations réduites de T_A, T_B et T_C.

Exercice 5 : Équations de tangentes

En utilisant les nombres dérivés trouvés aux exercices 1 et 2, déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

a) $f(x) = 3x^2 + x$; $a = 2$

b) $f(x) = x^2 - 5$; $a = -1$

c) $f(x) = x^3$; $a = 1$

d) $f(x) = \dfrac{2}{x}$; $a = 1$

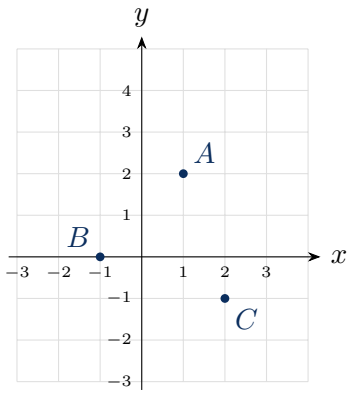
e) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$; $a = 1$

f) $f(x) = \sqrt{x+1}$; $a = 3$

Exercice 6 : Tracer des tangentes

Une fonction f vérifie : $f(1) = 2$ et $f'(1) = 3$; $f(-1) = 0$ et $f'(-1) = -\frac{1}{2}$; $f(2) = -1$ et $f'(2) = 0$.

1. Dans le repère ci-dessous, tracer les tangentes à la courbe de f aux points $A(1\,;2)$, $B(-1\,;0)$ et $C(2\,;-1)$.
2. Donner l'équation réduite de chacune de ces tangentes.



Exercice 7 : Nombre dérivé en a quelconque

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Montrer que pour tout réel a, $f'(a) = 2a - 3$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Déterminer le point de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite $y = x$, puis l'équation de cette tangente.
4. Déterminer le point de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est horizontale.
5. Montrer que la tangente au point d'abscisse a coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $-a^2 + 2$. En déduire les tangentes à $\mathcal{C}_f$ qui passent par $P(0\,;-2)$.

Exercice 8 : Trouver les paramètres

Soit $f(x) = ax^2 + bx$ où a et b sont deux réels. On sait que la courbe de f passe par $A(1\,;3)$ et que la tangente en A a pour coefficient directeur 5.

1. Calculer $f'(1)$ en fonction de a et b (par la définition).
2. Écrire un système vérifié par a et b, puis le résoudre.
3. Donner l'équation de la tangente en A.

B Approximation affine

Exercice 9 : Approximation affine

Rappel : si f est dérivable en a, alors pour h proche de 0 : $f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a)$.

1. Avec $f(x) = x^2$ et $a = 3$, donner une valeur approchée de $3{,}001^2$.
2. Avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 9$, donner une valeur approchée de $\sqrt{9{,}03}$.
3. Avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = 1$, donner une valeur approchée de $\dfrac{1}{1{,}02}$.
4. Montrer que pour h proche de 0, $(1+h)^3 \approx 1 + 3h$. En déduire des valeurs approchées de $1{,}001^3$ et de $0{,}998^3$.
5. Comparer chaque résultat avec la valeur donnée par la calculatrice.

C Fonction dérivée

Rappel – tableaux des dérivées

$f(x)$	$f'(x)$	f dérivable sur
$k \ \ (k \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$x^n \ \ (n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$

Opération	Dérivée
somme	$(u+v)' = u' + v'$
produit par k	$(ku)' = k\,u'$
produit	$(uv)' = u'v + uv'$
inverse $(v \neq 0)$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
quotient $(v \neq 0)$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$g(ax+b)$	$a\,g'(ax+b)$

Exercice 10 : Polynômes

Calculer $f'(x)$ (toutes ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$).

a) $f(x) = -4x + 9$

b) $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x - 8$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 7}{5}$

e) $f(x) = \sqrt{2}\,x^3 - \pi x$

f) $f(x) = (2x-1)^2$

Exercice 11 : Avec $\sqrt{x}$ et $\frac{1}{x}$

Préciser l'ensemble de dérivabilité puis calculer $f'(x)$.

a) $f(x) = 3x^2 - 4\sqrt{x}$

b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{5}{x} - 2x^3$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x}$

e) $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{3}{x} - 1$

Exercice 12 : Dérivée d'un produit

Préciser l'ensemble de dérivabilité puis calculer $f'(x)$ en utilisant $(uv)' = u'v + uv'$.

a) $f(x) = (x^2+1)(x-4)$

b) $f(x) = (3x-2)(x^3+x)$

c) $f(x) = (2x+1)(x^2 - x + 3)$

d) $f(x) = x\sqrt{x}$

e) $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$

Exercice 13 : Dérivée de l'inverse

Préciser l'ensemble de dérivabilité puis calculer $f'(x)$ en utilisant $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$

c) $f(x) = \dfrac{3}{2x-6}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$

e) $f(x) = \dfrac{-2}{x^3+1}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Exercice 14 : Dérivée d'un quotient

Préciser l'ensemble de dérivabilité puis calculer $f'(x)$ en utilisant $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+1}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$

Exercice 15 : Ensembles de dérivabilité

Déterminer l'ensemble de dérivabilité de chaque fonction, puis calculer $f'(x)$.

a) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x-4}$

b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-9}$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$

Exercice 16 : Fonction dérivée et tangentes

Soit $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 0 et 2.
3. Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente a pour coefficient directeur 3.

Exercice 17 : Problème de synthèse

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
3. Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est horizontale.
4. Existe-t-il des tangentes à $\mathcal{C}_f$ parallèles à la droite $y = 9x$? Si oui, donner leurs équations.