Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

1) Montrez que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et que f est paire.

2) Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interprétez graphiquement le résultat.

3) Calculez $f'(x)$ et dressez le tableau de variations de f.

4) Déterminez la tangente de $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

5) Vérifiez que : $\forall x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = \dfrac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$; et étudiez la convexité de $(\mathcal{C}_f)$.

6) Tracez $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

7) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $= [0;+\infty[$.

a – Montrez que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b – Montrez que g^{-1} est dérivable en 0, et calculez $(g^{-1})'(0)$.

c – Déterminez $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

d – Tracez $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 1 + \sqrt{x^2-2x}$.

1) Montrez que $\mathcal{D}_f =]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$.

2) Montrez que la droite d'équation : $x = 1$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.

3) Montrez que la droite (D): $y = x$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

4) Montrez que f n'est pas dérivable à droite en 2. Interprétez graphiquement ce résultat.

5) a – Montrez que f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

b – Donnez le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$.

6) Tracez $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

7) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [2;+\infty[$.

a – Montrez que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b – Donnez le tableau de variations de g^{-1}.

c – Déterminez $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

d – Tracez $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 3

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1.1. Etudiez la monotonie de la fonction g et dressez son tableau de variations.

1.2. Montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]2;3[$.

1.3. Déduisez le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

1.4. Etudiez les branches infinies de $(\mathcal{C}_g)$.

1.5. Montrez que $I(0;-3)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_g)$.

1.6. Déterminez la tangente de $(\mathcal{C}_g)$ en I.

1.7. Tracez $(\mathcal{C}_g)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2}$.

2.1. Calculez les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

2.2. Déterminez les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

2.3. Montrez que : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

2.4. Etudiez le signe de $f'(x)$ et déduisez-en le tableau de variations de f.

2.5. Etudiez la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ avec la droite (Δ) d'équation $y = x$.

2.6. Montrez que : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f''(x) = \frac{3(2x+3)}{x^4}$ et étudiez la convexité de $(\mathcal{C}_f)$.

2.7. Tracez $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On donne $\alpha \approx 2{,}1$ et $f(\alpha) \approx 3{,}8$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-2x}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ le tracé de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1) Déterminez $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f.

2) a – Calculez les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

b – En déduire les équations des asymptotes de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3) a – Montrez que pour tout réel x de $\mathcal{D}_f$: $f'(x) = \frac{(x+1)(2-4x)}{(x^2-2x)^2}$.

b – Donnez le tableau de variations de f.

c – Donnez la nature des tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ aux points d'abscisses -1 et $\frac{1}{2}$.

4) Tracez $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. ($\|\vec{\imath}\| = 2cm$ *et* $\|\vec{\jmath}\| = 1cm$)

" On admet que $(\mathcal{C}_f)$ admet un seul point d'inflexion de coordonnées : $(-1{,}9;\ 1{,}1)$ "

5) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]2;+\infty[$.

a – Montrez que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur I.

b – Donnez le tableau de variations de g^{-1}.

c – Comparez $g^{-1}(3{,}1234)$ et $g^{-1}(3{,}1324)$ en justifiant votre réponse.

d – Vérifiez que $g^{-1}\left(\frac{19}{3}\right) = 3$ et calculer $(g^{-1})'\left(\frac{19}{3}\right)$.

Exercice 5

Soit f la fonction numérique à variable réelle x telle que : $f(x) = x\sqrt{x^2 - 2x}$,

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. (unité $1cm$)

1) a – Déterminez $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

b – Montrez que f est continue sur $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$.

c – Etudiez la dérivabilité de la fonction f à gauche en 0 et à droite en 2, et interprétez chaque résultat graphiquement.

2) a – Vérifiez que : $\forall x \in \mathcal{D}_f - \{0;2\}$: $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

b – Etudiez le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3) a – Montrez que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

b – Tracez soigneusement $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty;0]$.

a – Montrez que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b – Dressez le tableau de variations de g^{-1}.

c – Vérifiez que $g^{-1}(-\sqrt{3}) = -1$ et déduire $(g^{-1})'(-\sqrt{3})$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} & si\ x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1} & si\ x < 0 \end{cases}$

et $(\mathcal{C}_f)$ le tracé de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1) Montrez que f est continue en 0.

2) a – Calculez les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b– Montrez que la droite (D): $y = x + 1$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

3) Etudiez la dérivabilité de la fonction f à gauche et à droite en 0, et interprétez chaque résultat graphiquement.

4) a – Vérifiez que : $\forall x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x}}$.

b – Vérifiez que : $\forall x \in]-\infty;0[$: $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

c – En déduire la monotonie de f sur les intervalles $[0;+\infty[$ et $]-\infty;0]$.

5) Dressez le tableau de variations de f.

6) Déterminez l'équation réduite de la tangente (T) de $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse -1.

7) Tracez (D), (T) et $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

" On admet que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse comprise entre : -1 et 0 "

8) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; 0[$.

a – Montrez que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b – Tracez $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

c – Vérifiez que $g(-1) = \frac{1}{2}$ et déduire $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.

d – Déterminez $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x - 1 + 2\sqrt{1-x} & si\ x < 1 \\ f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1} & si\ x \geq 1 \end{cases}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. (unité $1cm$).

1) Montrez que f est continue en 1.

2) a – Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b– Etudiez les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3) Etudiez la dérivabilité de la fonction f à gauche et à droite en 1, et interprétez chaque résultat graphiquement.

4) a – Montrez que f est strictement croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

b – Vérifiez que : $\forall x \in]-\infty; 1[: f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x}\cdot\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$.

c – En déduire la monotonie de f sur les intervalles $]-\infty; 0]$ et $[0; 1]$.

d – Dressez le tableau de variations de f.

5) Calculez $f(-3)$ puis tracez soigneusement la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

6) Etudiez graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{2x-1} & si\ x \geq 1 \\ f(x) = (1-x)\left(\sqrt{1-x} - 2\right)^2 & si\ x < 1 \end{cases}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. (unité $1cm$).

1) Montrez que f est continue en 1.

2) a – Calculez les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b – Montrez que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty$ et en déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction.

c – Calculez $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et en déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ dont on précisera la direction.

3) Etudiez la dérivabilité de la fonction f à gauche et à droite en 1, et interprétez chaque résultat graphiquement.

4) a – Vérifiez que : $\forall x \in]1;+\infty[: f'(x) = \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}\cdot(\sqrt{2x-1}+1)}$.

b – Vérifiez que : $\forall x \in]-\infty;1[: f'(x) = \dfrac{-2x(x+3)}{(\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x}+1)}$.

c – En déduire la monotonie de f sur les intervalles $[1;+\infty[$ et $]-\infty;1]$.

5) Dresser le tableau de variations de f.

6) Tracez la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

" On admet que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse comprise entre : -2 et -1 "

8) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [1;+\infty[$.

a – Montrez que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b – Tracez $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 & si\ x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + 1 & si\ x < 0 \end{cases}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. (unité $1cm$).

1) a – Calculez les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b – Etudiez la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

c – Montrez que pour tout réel de $]-\infty;0[: f(x) + x - 1 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}-x)}$.

d – Montrez que la droite $(\Delta): y = -x + 1$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

e – Etudiez la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ) sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

2) a – Montrez que f est continue en 0.

b – Etudiez la dérivabilité de la fonction f à gauche et à droite en 0, et interprétez chaque résultat graphiquement.

3) a – Vérifiez que pour tout x de $]0;+\infty[: f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.

b – Vérifiez que pour tout x de $]-\infty;0[: f'(x) = \dfrac{x(x^2+2)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

c – Etudiez les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

4) Tracez la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

" On admet que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse comprise entre : -2 et -1 "

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1;+\infty[$.

a – Montrez que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle que l'on déterminera.

b – Tracez $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 10

I) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = 3x - 4x\sqrt{x} - \frac{1}{4}$.

1) Donner le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}^+$.

2) En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $h(x) \leq 0$.

II) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = (4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + \frac{1}{2}$.

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. (unité $2cm$).

1) a – Calculez la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b – Etudiez la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

2) Etudiez la dérivabilité de f à droite en 0, et interprétez ce résultat graphiquement.

3) a – Vérifiez que pour tout x de $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{2h(x)}{\sqrt{x}}$.

b – Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Montrez que $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$.

5) Tracez la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

" *On admet que* $(\mathcal{C}_f)$ *admet un seul point d'inflexion de coordonnées :* $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ "

6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.

a – Montrez que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle que l'on déterminera.

b – Tracez $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 11

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + 3 - \sqrt{\frac{x}{x-2}}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. (unité $1cm$).

1) Montrez que l'ensemble de définition de la fonction f est : $\mathcal{D}_f =]-\infty;0] \cup]2;+\infty[$.

2) Calculez la limite $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$, et interprétez graphiquement ce résultat.

3) Calculez les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4) Montrez que la droite (Δ): $y = x + 2$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.

5) Précisez la position de (Δ) par rapport à $(\mathcal{C}_f)$ sur les intervalles $]-\infty;0]$ et $]2;+\infty[$.

6) Etudiez la dérivabilité de f à gauche en 0, et interprétez ce résultat graphiquement.

7) Vérifiez que pour tout x de $\mathcal{D}_f - \{0\}$: $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x-2)^2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}$.

8) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

9) Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-3;-2[$.

10) Tracez la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

" On admet que $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un autre point d'abscisse β comprise entre : 2 et $\frac{5}{2}$ "

11) Discutez suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

12) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]2;+\infty[$.

a – Montrez que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle que l'on déterminera.

b – Vérifiez que $g^{-1}(0) = \beta$ et montrez que : $(g^{-1})'(0) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(\beta-2)^2(\beta+3)}}$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. (unité $1cm$).

1) a – Montrez que l'ensemble de définition de la fonction f est : $\mathcal{D}_f =]-\infty;0] \cup]1;+\infty[$.

b – Calculez les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

c – En déduire les équations des asymptotes de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

2) Etudiez la dérivabilité de f à gauche en 0, et donnez une interprétation au résultat obtenu.

3) a – Prouvez que : $f'(x) = \dfrac{-1}{2(x-1)^2 \cdot \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}}$ pour tout x de $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.

b – Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Tracez la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;0]$.

a – Montrez que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle I à préciser.

b – Déterminez $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$.

c – Tracez $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère.