Série des exercices 07 : Étude d'une fonction numérique

Exercice n^o 1 .

Déterminer les équations des asymptotes verticales (en parallèles avec l'axe des ordonnes) de $\mathcal{C}_f$, dans chacun les cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{5x-1}{2x+7}$ b) $f(x) = \dfrac{1-x}{(5x-7)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{5-cos(x)}{x^2+x}$

Exercice n^o 2 .

Déterminer les équations des asymptotes horizontales (en parallèles avec l'axe des abscisses) de $\mathcal{C}_f$, dans chacun les cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{2x-cos(x)}{x}$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+1}{1+5x}}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2-x}+x$ d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2-3x-1}}{x}$

Exercice n^o 3 .

Déterminer les équations des asymptotes obliques de $\mathcal{C}_f$, dans chacun les cas suivant :

a) $f(x) = 3-2x-\dfrac{x}{x^2+2}$ b) $f(x) = x-2+\dfrac{sin(x)}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{3x+1}$ d) $f(x) = \dfrac{x^2-x^3}{x^2+x+1}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

Exercice n^o 4 .

Déterminer les branches infinies (s'elles existent) de $\mathcal{C}_f$, dans chacun les cas suivant :

a) $f(x) = x^3-x^2+3$ b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

c) $f(x) = x+\sqrt{2-x}$ d) $f(x) = 2-\sqrt{1-2x}$

e) $f(x) = x\sqrt{x^2-x+1}$

Exercice n^o 5 .

Montrer que I est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, dans chacun les cas suivant :

a) $f(x) = x^3+3x-2$, $I(0;2)$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, $I(1;2)$

c) $f(x) = x+1-\dfrac{4}{x-2}$, $I(2;3)$

d) $f(x) = \dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$, $I(0;3)$

e) $f(x) = \sqrt{3}cos(2x)+sin(2x)$, $I(\frac{\pi}{3};0)$

Exercice n^o 6 .

Montrer que la droite (D) est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, dans chacun les cas suivant :

a) $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$, $(D) : x = 2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x-2}$, $(D) : x = -\dfrac{1}{2}$

c) $f(x) = sin(x)+cos(2x)$, $(D) : x = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice n^o 7 .

Étudier la convexité de $\mathcal{C}_f$ sur I , dans chacun les cas suivant :

a) $f(x) = x^3+3x^2+2x+1$, $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 4x^3-x^4+2009$, $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = cos(2x)-sin(2x)$, $I = \left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

Exercice n^o 8 .

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x^3-3x^2+1$$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
2. Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$
3. Calculer $f'(x)$, $(\forall x \in \mathbb{R})$ puis dresser le tableau de variations de f .
4. (a) Montrer que $\Omega(1;-1)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
   (b) Vérifier que le point Ω est une centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
   (c) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point Ω.
   (d) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice n^o 9 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 - 6x^2 - 9x - 2$$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
2. Calculer $f'(x)$, $(\forall x \in \mathbb{R})$ puis dresser le tableau de variations de f .
3. (a) Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$
   (b) Donner l'équation de la tangente de $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2
   (c) Montrer que ce point est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
   (d) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$.
   (e) Résoudre graphiquement $f(x) \leq 0$
4. Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre des solutions de l'équation :

$$x^3 + 6x^2 + 9x + 2 + m = 0$$

5. Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre des solutions de l'équation :

$$x\sqrt{-x} + 6x - 9\sqrt{-x} - m = 0$$

Exercice n^o 10 .

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 5}{x^2 + 5x + 7}$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ puis calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ puis calculer f' .
3. Dresser tableau de variation de f .
4. Soit (D) l'asymptote verticale de $(\mathcal{C}_f)$, déterminer l'équation de (D) puis étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ avec (D)
5. Déterminer les points d'intersections de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère .
6. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice n^o 11 .

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Étudier la fonction f puis construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère .

Exercice n^o 12 .

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = x^4 - 2x^2$$

Étudier la fonction g puis construire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans un repère .

Exercice n^o 13 .

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ puis calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
2. On considère le polynôme P définie par : $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$, calculer $P(1)$ puis factoriser $P(x)$.
3. Montrer que $(\forall x \in \mathcal{D}_f)$, $f'(x) = \frac{P(x)}{(x+1)^3}$
4. Déduire tableau de variations de f .
5. Déterminer les réels a, b, c et d tels que : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$
6. Déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) à déterminer .
7. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D) .
8. Donner l'équation de la tangente de $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0
9. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$

Exercice n^o 14 .

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2 + 1}$$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
2. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ que l'on déterminer .
3. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite (D).
4. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f'(x) > 0$
5. Dresser tableau de variation de f .

6. Donner l'équation de la tangente de $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.
7. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$
8. Étudier la convexité de $(\mathcal{C}_f)$ et déterminer ses points d'inflexion .
9. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
10. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) > 0$.
11. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$: $\dfrac{1}{x+2} + \sqrt{x+1} > \dfrac{3}{2}$

Exercice n^o 15 .

Soit f la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2\sqrt{(x+2)\,|x-1|}$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$
2. Montrer que la droite (D) : $y = 2x+1$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$.
3. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite (D) sur $[1;+\infty[$.
4. Étudier la dérivabilité de f au point -2 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .
5. Étudier la dérivabilité de f au point 1 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .
6. Calculer $f'(x)$, $(\forall x \in]-2;1[\cup]1;+\infty[)$
7. Dresser tableau de variation de f .
8. Donner l'équation de la tangente de $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2.
9. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
10. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = 2\sqrt{|(x+2)(x-1)|}$$

   (a) Montrer que la droite $(\triangle)$: $x = -\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_g)$.
   (b) Dresser tableau de variation de g .

Exercice n^o 16 .

Soit f la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(\frac{2x}{2\sqrt{x}-1}\right)^2$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, puis calculer la limite en $\frac{1}{4}$, interpréter le résultat
2. Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} (f(x)-x)$
3. Déduire la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$
4. Étudier la dérivabilité de f au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .
5. Montrer que

$$f'(x) = \frac{8x(\sqrt{x}-1)}{(2\sqrt{x}-1)^3} \ (\forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0\})$$

6. Dresser tableau de variation de f .
7. Montrer que

$$f''(x) = \frac{4(2-\sqrt{x})}{(2\sqrt{x}-1)^4} \ (\forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0\})$$

8. Déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion sur $]-\infty;-1[$ à déterminer .
9. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice n^o 17 .

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty;\frac{4\pi}{3}\right]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3sin(2x)}{2(1-cos(x))^2} & x > 0 \\ \sqrt{x^2-x} + \sqrt{x^2+1} & x \le 0 \end{cases}$$

1. Calculer la limite de f en $-\infty$
2. Montrer que la droite : $y = -2x + \dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$
3. Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} f(x)$ et interpréter le résultat.
4. Étudier la dérivabilité de f au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat .
5. Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations .
6. Déterminer les points d'intersections de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère .
7. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice n^o 18 .

Soit $m \in \mathbb{R}^*$ on considère la fonction f_m définie par :

$$f_m(x) = x + m - 3 + \frac{1}{mx}$$

$(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m.

1. Dans cette question on prend : $m = 1$
   (a) Étudier la fonction f_1 ($\mathcal{D}_f$, les limites , les variations)
   (b) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_1)$
   (c) Construire la courbe $(\mathcal{C}_1)$
2. Étudier les variations de f_m. $(m \in \mathbb{R}^*)$

3. Dans cette question on suppose que : $m > 0$
   (a) Étudier le signe du polynôme : $P(t) = t^3 - 3t + 2$ sur $]0;+\infty[$
   (b) Déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$, $f_m(x) \geq 0$
4. Déduire que si $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : $abc = 1$ alors : $a + b + c \geq 3$

Exercice n^o 19 .

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ des paramètres, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + c}{x^2}$$

1. Déterminer $(\mathcal{C}_f)$ dans le cas : $a = b = c = 0$
2. Déterminer les valeurs de a, b et c tels que :
   • La droite (D) d'équation $y = 2x - 3$ asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$
   • $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
3. On prend dans la suite : $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$
   (a) Étudier les variations de f
   (b) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$
   (c) Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D)
   (d) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisse .
   (e) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
   (f) Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre des solutions de l'équation :

$$2x^3 - (m+3)x^2 + 1 = 0$$

   (g) Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre des solutions dans $]-\pi;\pi]$ de l'équation :

$$2sin^3(t) - (m+3)sin^2(t) + 1 = 0$$

   (h) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation

$$2sin^3(t) - 3sin^2(t) + 1 = 0$$

Exercice n^o 20 .

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ des paramètres, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

1. Déterminer $\mathbb{D}_f$ et calculer en fonction de a , b et c : $f(1)$, $f'(1)$ et $f''(1)$
2. Déterminer les valeurs de a, b et c tels que :
   • $f''(1) = 0$
   • $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente horizontale au point $A(1;3)$.
3. On prend dans la suite : $a = 1$, $b = 3$ et $c = -1$
   (a) Calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$
   (b) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$
   (c) Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à l'asymptote oblique.
   (d) Dresser tableau de variations de f
   (e) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion à déterminer .
   (f) Construire $(\mathcal{C}_f)$

Exercice n^o 21 .

Soit $m \in \mathbb{R}$ on considère la fonction f_m définie par :

$$f_m(x) = \frac{x^3}{x^2 + mx + m}$$

$(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m.

1. Déterminer suivant les valeurs de m, $\mathcal{D}_{f_m}$
2. Déterminer en fonction de m , les valeurs de a, b, c et d tels que :

$$f_m(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + mx + m}$$

3. Déduire l'équation d'asymptote oblique de $(\mathcal{C}_m)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$
4. On suppose que $0 < m < 4$ et soit $(\triangle_m)$ la droite d'équation $y = x - m$
   (a) Étudier suivant les valeurs de m, la position relative de $(\mathcal{C}_m)$ par rapport à $(\triangle_m)$
   (b) Calculer $f'_m(x)$, $(\forall x \in \mathcal{D}_{f_m})$
   (c) Donner suivant les valeurs de m, tableau de variations de f_m
5. On suppose que $m = 2$
   (a) Dresser tableau de variation de f_2
   (b) Montrer que $(\mathcal{C}_2)$ admet en deux points A et B une tangente parallèle à la droite $(\triangle_2)$
   (c) Déterminer les coordonnées de A et B .
   (d) Construire $(\mathcal{C}_2)$.

Bon Courage

Taher Bouyguir