Lycée : Med VI - Taliouine	**Étude des fonctions**	1 Bac Sciences Expérimentales
Année scolaire : 2022/2023	Série N°9	Prof : Taher Bouyguir

Exercice 1

Déterminer les équations des asymptotes verticales (en parallèles avec l'axe des ordonnes) de $\mathcal{C}_f$, dans chacun les cas suivants :

a) $f(x)=\dfrac{5x-1}{2x+7}$ b) $f(x)=\dfrac{1-x}{(5x-7)^2}$

c) $f(x)=\dfrac{5-cos(x)}{x^2+x}$

Exercice 2

Déterminer les équations des asymptotes horizontales (en parallèles avec l'axe des abscisses) de $\mathcal{C}_f$, dans chacun les cas suivants :

a) $f(x)=\dfrac{2x-cos(x)}{x}$ b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x+1}{1+5x}}$

c) $f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$ d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2-3x-1}}{x}$

Exercice 3

Déterminer les équations des asymptotes obliques de $\mathcal{C}_f$, dans chacun les cas suivant :

a) $f(x)=3-2x-\dfrac{x}{x^2+2}$ b) $f(x)=x-2+\dfrac{sin(x)}{x}$

c) $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{3x+1}$ d) $f(x)=\dfrac{x^2-x^3}{x^2+x+1}$

e) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$

Exercice 4

Déterminer les branches infinies (s'elles existent) de $\mathcal{C}_f$, dans chacun les cas suivant :

a) $f(x)=x^3-x^2+3$ b) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

c) $f(x)=x+\sqrt{2-x}$ d) $f(x)=2-\sqrt{1-2x}$

e) $f(x)=x\sqrt{x^2-x+1}$

Exercice 5

Montrer que I est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$, dans chacun les cas suivant :

a) $f(x)=x^3+3x-2$, $I(0;2)$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$, $I(1;2)$

c) $f(x)=x+1-\dfrac{4}{x-2}$, $I(2;3)$

d) $f(x)=\dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$, $I(0;3)$

e) $f(x)=\sqrt{3}cos(2x)+sin(2x)$, $I(\frac{\pi}{3};0)$

Exercice 6

Montrer que la droite (D) est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$, dans chacun les cas suivant :

a) $f(x)=\dfrac{1}{(2-x)^2}$, $(D):x=2$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x-2}$, $(D):x=-\dfrac{1}{2}$

c) $f(x)=sin(x)+cos(2x)$, $(D):x=\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 7

Étudier la convexité de $\mathcal{C}_f$ sur I , dans chacun les cas suivant :

a) $f(x)=x^3+3x^2+2x+1$, $I=\mathbb{R}$

b) $f(x)=4x^3-x^4+2009$, $I=\mathbb{R}$

c) $f(x)=cos(2x)-sin(2x)$, $I=\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

Exercice 8

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=x^3-3x^2+1$$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
2. Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$
3. Calculer $f'(x)$, $(\forall x\in\mathbb{R})$ puis dresser le tableau de variations de f .
4. (a) Montrer que $\Omega(1;-1)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
   (b) Vérifier que le point Ω est une centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
   (c) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point Ω.
   (d) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x)=-x^3-6x^2-9x-2$$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

2 Calculer $f'(x)$, $(\forall x \in \mathbb{R})$ puis dresser le tableau de variations de f .

3 (a) Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$

(b) Donner l'équation de la tangente de $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2

(c) Montrer que ce point est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

(d) Construire la courbe $\mathcal{C}_f$.

(e) Résoudre graphiquement $f(x) \leq 0$

4 Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre des solutions de l'équation :

$$x^3 + 6x^2 + 9x + 2 + m = 0$$

5 Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre des solutions de l'équation :

$$x\sqrt{-x} + 6x - 9\sqrt{-x} - m = 0$$

Exercice 10

Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 5}{x^2 + 5x + 7}$$

1 Déterminer $\mathcal{D}_f$ puis calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

2 Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ puis calculer f' .

3 Dresser tableau de variation de f .

4 Soit (D) l'asymptote verticale de $(\mathcal{C}_f)$, déterminer l'équation de (D) puis étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ avec (D)

5 Déterminer les points d'intersections de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère .

6 Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Étudier la fonction f puis construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère .

Exercice 12

Soit g la fonction définie par: $g(x) = x^4 - 2x^2$

Étudier la fonction g puis construire la courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans un repère .

Exercice 13

Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}$$

1 Déterminer $\mathcal{D}_f$ puis calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

2 On considère le polynôme P définie par : $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$, calculer $P(1)$ puis factoriser $P(x)$.

3 Montrer que $(\forall x \in \mathcal{D}_f)$, $f'(x) = \frac{P(x)}{(x+1)^3}$

4 Déduire tableau de variations de f .

5 Déterminer les réels a, b, c et d tels que :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$$

6 Déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) à déterminer .

7 Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D) .

8 Donner l'équation de la tangente de $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0

9 Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$

Exercice 14

Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2 + 1}$$

1 Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

2 Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ que l'on déterminer .

3 Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite (D).

4 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f'(x) > 0$

5 Dresser tableau de variation de f .

6 Donner l'équation de la tangente de $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

7 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$

8 Étudier la convexité de $(\mathcal{C}_f)$ et déterminer ses points d'inflexion .

9 Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

10 Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) > 0$.

11 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$: $\dfrac{1}{x+2} + \sqrt{x+1} > \dfrac{3}{2}$

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par:

$$f(x) = 2\sqrt{(x+2)\,|x-1|}$$

1 Calculer la limite de f en $+\infty$

2 Montrer que la droite (D) : $y = 2x+1$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$.

3 Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite (D) sur $[1;+\infty[$.

4 Étudier la dérivabilité de f au point -2 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .

5 Étudier la dérivabilité de f au point 1 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .

6 Calculer $f'(x)$, $(\forall x \in]-2;1[\cup]1;+\infty[)$

7 Dresser tableau de variation de f .

8 Donner l'équation de la tangente de $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2.

9 Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

10 Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = 2\sqrt{|(x+2)(x-1)|}$$

(a) Montrer que la droite $(\triangle)$: $x = -\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_g)$.

(b) Dresser tableau de variation de g .

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par:

$$f(x) = \left(\frac{2x}{2\sqrt{x}-1}\right)^2$$

1 Déterminer $\mathcal{D}_f$, puis calculer la limite en $\frac{1}{4}$, interpréter le résultat

2 Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} (f(x)-x)$

3 Déduire la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

4 Étudier la dérivabilité de f au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu .

5 Montrer que

$$f'(x) = \frac{8x(\sqrt{x}-1)}{(2\sqrt{x}-1)^3} \ (\forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0\})$$

6 Dresser tableau de variation de f .

7 Montrer que

$$f''(x) = \frac{4(2-\sqrt{x})}{(2\sqrt{x}-1)^4} \ (\forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0\})$$

8 Déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion sur $]-\infty;-1[$ à déterminer .

9 Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 17

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;\frac{4\pi}{3}]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3sin(2x)}{2(1-cos(x))^2} & x > 0 \\ \sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+1} & x \leq 0 \end{cases}$$

1 Calculer la limite de f en $-\infty$

2 Montrer que la droite : $y = -2x + \dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$

3 Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat.

4 Étudier la dérivabilité de f au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat .

5 Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variations .

6 Déterminer les points d'intersections de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère .

7 Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 18

Soit $m \in \mathbb{R}^*$ on considère la fonction f_m définie par :

$$f_m(x) = x + m - 3 + \frac{1}{mx}$$

$(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m.

1 Dans cette question on prend : $m = 1$

(a) Étudier la fonction f_1 ($\mathcal{D}_f$, les limites , les variations)

(b) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_1)$

(c) Construire la courbe $(\mathcal{C}_1)$

2 Étudier les variations de f_m. $(m \in \mathbb{R}^*)$

3 Dans cette question on suppose que : $m > 0$

(a) Étudier le signe du polynôme : $P(t) = t^3 - 3t + 2$ sur $]0; +\infty[$

(b) Déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$, $f_m(x) \geq 0$

4 Déduire que si $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que : $abc = 1$ alors : $a + b + c \geq 3$

Exercice 19

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ des paramètres, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + c}{x^2}$$

1 Déterminer $(\mathcal{C}_f)$ dans le cas : $a = b = c = 0$

2 Déterminer les valeurs de a, b et c tels que :
• La droite (D) d'équation $y = 2x - 3$ asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$
• $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

3 On prend dans la suite : $a = 2$, $b = -3$ et $c = 1$

(a) Étudier les variations de f

(b) Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$

(c) Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D)

(d) Déterminer les points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisse .

(e) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

(f) Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre des solutions de l'équation :

$$2x^3 - (m+3)x^2 + 1 = 0$$

(g) Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre des solutions dans $]-\pi; \pi]$ de l'équation :

$$2sin^3(t) - (m+3)sin^2(t) + 1 = 0$$

(h) Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation

$$2sin^3(t) - 3sin^2(t) + 1 = 0$$

Exercice 20

Soit $m \in \mathbb{R}$ on considère la fonction f_m définie par :

$$f_m(x) = \frac{x^3}{x^2 + mx + m}$$

$(\mathcal{C}_m)$ la courbe représentative de f_m.

1 Déterminer suivant les valeurs de m, $\mathcal{D}_{f_m}$

2 Déterminer en fonction de m , les valeurs de a, b, c et d tels que :

$$f_m(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + mx + m}$$

3 Déduire l'équation d'asymptote oblique de $(\mathcal{C}_m)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

4 On suppose que $0 < m < 4$ et soit $(\triangle_m)$ la droite d'équation $y = x - m$

(a) Étudier suivant les valeurs de m, la position relative de $(\mathcal{C}_m)$ par rapport à $(\triangle_m)$

(b) Calculer $f'_m(x)$, $(\forall x \in \mathcal{D}_{f_m})$

(c) Donner suivant les valeurs de m, tableau de variations de f_m

5 On suppose que $m = 2$

(a) Dresser tableau de variation de f_2

(b) Montrer que $(\mathcal{C}_2)$ admet en deux points A et B une tangente parallèle à la droite $(\triangle_2)$

(c) Déterminer les coordonnées de A et B .

(d) Construire $(\mathcal{C}_2)$.

Bon Courage

Taher Bouyguir