Série des exercices 06 : FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice n^o 1 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

a) $e^{3x-2} = e$; b) $e^x - e^{-x} = 0$;

c) $e^{x^2-4x} = 1$; d) $e^{2x} - 1 = 0$;

e) $e^{x^2+9} = (e^{2x})^3$; f) $xe^{5x} + 3e^{5x} = 0$;

g) $e^{2x} + 4e^x - 5 = 0$; h) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$;

i) $2e^{2x} + 5e^x + 3 = 0$; j) $e^{x^2-4x} \geqslant 1$;

k) $e^{2x} - 1 < 0$; l) $e^{x^2+9} > (e^{2x})^3$;

m) $e^{2x} - 4e^x + 3 < 0$; n) $2e^{2x} + 5e^x + 3 \geqslant 0$;

o) $e^{2x} + 4e^x - 5 \leqslant 0$;

Exercice n^o 2 .

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty} e^{x^2-1}$; b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$

c) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^3+5}$ d) $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2}{x}}$

e) $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}$ f) $\lim_{x\to-\infty} (x^2-5x)e^x$

g) $\lim_{x\to+\infty} e^x - e^{-2x}$ h) $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x + 5$

i) $\lim_{x\to+\infty} e^x - x^3 + 1$ j) $\lim_{x\to-\infty} e^x(x+6)$

k) $\lim_{x\to-\infty} e^{x^2}e^{-x}$ l) $\lim_{x\to-\infty} (e^{-x} + 2x - 4)$

m) $\lim_{x\to0^+} e^{\frac{2}{x}}$ n) $\lim_{x\to0^+} \frac{e^{7x}-1}{x}$

o) $\lim_{x\to0^+} \frac{e^{3x}-e^x}{x}$ p) $\lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 2)$

q) $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x+2}{x-1}}$ r) $\lim_{x\to0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x}$

Exercice n^o 3 .

Déterminez la dérivée f' de la fonction f dans chaque des cas :

a) $f(x) = e^{3x-2}$; b) $f(x) = e^{x^2-4x}$

c) $f(x) = e^{x^2-4x}$ d) $f(x) = (x^2-5x)e^x$

e) $f(x) = \frac{e^{3x}-e^x}{x}$ f) $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$

g) $f(x) = e^{\frac{2}{x}}$ h) $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$

i) $f(x) = (3-e^x)^2$ j) $f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$

k) $f(x) = (x^2-3)e^{-7x+2}$

Exercice n^o 4 .

f est la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2}{1-e^x}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f .

1. Déterminer L'ensemble de définition de f .
2. Dressez le tableau de variations de f .
3. Précisez les différentes asymptotes $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice n^o 5 .

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3e^x}{3+e^x}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f .

1. Vérifiez que $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{3}{1+3e^{-x}}$
2. Démontrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
3. Calculez $f'(x)$, puis déduire que f est strictement croissante dans $\mathbb{R}$
4. Démontrez que $\forall x \in \mathbb{R} : 0 < f(x) < 3$

Exercice n^o 6 .

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3-2x}{e^x}$$

1. Montrez que $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (2x-5)e^{-x}$.
2. Étudiez les variations de la fonction f .
3. Montrez que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans $[-1;0]$
4. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 0 de la courbe représentative de f .
5. Étudiez la convexité de la fonction f
6. la courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, donnez ses coordonnées.

Exercice n^o 7 .

Partie I

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{2x} - 2x - 1$$

1. Dressez le tableau de variations de g .
2. Déduire que $g(x)$ est positive $\forall x \in \mathbb{R}$.

Partie II

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)(e^{-2x}+1)$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f .

1. Déterminez la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$
2. Étudiez les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.
3. Vérifiez que $f'(x) = e^{-2x}g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
4. Dressez le tableau de variations de f
5. Calculez $f(-1)$ et Tracez dans un repère la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice n^o 8 .

g est la fonction définie sur $I =]-\infty; 0]$ par :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - ln(1+e^x)$$

Soit $(\mathcal{C}_g)$ la courbe représentative de g .

Partie I

1. Montrez que : $g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x+1)^2}$; $\forall x \in I$
2. Calculez $g(0)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$
3. Dressez le tableau de variations de g .
4. Déduire que $g(x) < 0$; $\forall x \in I$
5. Calculez $g"(x)$; $\forall x \in I$ et déduire la convexité de $(\mathcal{C}_g)$.
6. Calculez $g'(0)$ et Tracez dans un repère la courbe $(\mathcal{C}_g)$;(unité $4cm$).

Partie II

On considère la fonction f sur définie I par :

$$f(x) = \frac{ln(e^x+1)}{e^x}$$

1. Posant $t = e^x$ Montrez que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$
2. Calculer $f'(x)$; $\forall x \in I$ et déduire que $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$.
3. Calculer $f(0)$, et dressez le tableau de variation de f et déduire que $ln2 < f(x) < 1$; $\forall x \in I$

Exercice n^o 9 .

Partie I

g est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - 2x + 2$$

1. Calculez $g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
2. Étudiez le signe de $g'(x)$ puis dressez le tableau de variations de g.
3. Déduire que $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Partie II

f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f

1. Calculez $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, interpréter graphiquement les résultats.
2. Calculez $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\frac{1}{2}x+1)]$, interpréter graphiquement les résultats.
3. Étudiez la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$
4. Montrez que $f'(x) = \frac{g(x)}{2e^x}$, puis dressez le tableau de variation de f .
5. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1; 0[$.
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point $x_0 = 0$
7. Montrez que $f"(x) = \frac{x-2}{e^x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, puis déduire les coordonnées du point d'inflexion à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
8. Tracez dans un repère orthonormé la courbe $(\mathcal{C}_g)$; (on prend $\frac{2}{e^2} \simeq 0.27$)

Exercice n^o 10 .

On considère la fonction f sur définie $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x-1)^2e^x$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f

1. Calculez $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, interpréter graphiquement les résultats.
2. Vérifiez que $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $f(x) = (\frac{x-1}{x})^2x^2e^x$, puis Calculez $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat.
3. Montrez que $f'(x) = (x^2-1)e^x$,$\forall x \in \mathbb{R}$.
4. Étudiez le signe de $f'(x)$ puis dressez le tableau de variations de f .
5. Tracez $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé .
6. Montrez que la fonction F définie par :

$$F(x) = (x^2-4x+5)e^x$$

est une primitive de f.