Série 5 : Fonctions logarithmes

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 2x^4 - \ln x$; $f_2(x) = \ln(2x+5)$

$f_3(x) = \ln(2-x)$; $f_4(x) = \ln(x^2-9)$

$f_5(x) = \ln(x+3) + \ln(x-3)$; $f_6(x) = \ln\left(\frac{x+5}{x-4}\right)$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \ln(\sqrt{6}-\sqrt{5}) + \ln(\sqrt{6}+\sqrt{5})$

$B = \ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \ln(2+\sqrt{2})$

$C = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right) + \ln(9\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

Exercice 3

① Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 192021$.

① Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0{,}85^n < 0{,}001$.

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\left(\frac{2}{x} + \ln x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3+2\ln x}{6-4\ln x}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} 2x - 3\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 3\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(3x^2-4) - \ln(x^4+5)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2x)}{x}$

Exercice 5

Calculer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle donné :

$f_1(x) = 2x^4 - \ln x$; $I =]0;+\infty[$

$f_2(x) = x - 3 + \ln(-x)$; $I =]-\infty;0[$

$f_3(x) = \ln(3x-5) - \ln(x-3)$; $I =]3;+\infty[$

$f_4(x) = \ln(3x^2-5x+4)$; $I = \mathbb{R}$

Exercice 6

Déterminer les primitives de chaque fonction sur l'intervalle donné :

$f_1(x) = 4x - \frac{1}{x}$; $I =]0;+\infty[$

$f_2(x) = \frac{1}{2x+6}$; $I =]-3;+\infty[$

$f_3(x) = -\frac{3}{x-1}$; $I =]-\infty;1[$

$f_4(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+7}$; $I = \mathbb{R}$

$f_5(x) = \frac{(\ln x)^4}{x}$; $I =]0;+\infty[$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ par : $f(x) = \frac{4x-7}{2x-3}$.

① Vérifier que pour tout x de I :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{2x-3}$$

② Déterminer les primitives de f sur I.

② Déterminer la primitive F de f sur I qui vérifie $F(2) = -3$.

Exercice 8

① Déterminer les réels a et b tels que :

$\frac{2x+3}{x^2+2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2}$ pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2;0\}$.

② En déduire les primitives la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+2x}$.

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-5x+9}{(x-2)^2}$.

① Déterminer les réels a; b et c tels que, pour tout $x \neq 2$: $f(x) = a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{(x-2)^2}$.

② Déterminer les primitives de f sur $]2;+\infty[$.

Exercice 10

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x\ln x \quad \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1) a) Montrez que f est continue à droite en 0.

b) Etudiez la dérivabilité de la fonction f à

droite en 0, et interprétez ce résultat graphiquement.

2) Montrez que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3) Montrez que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

4) a) Calculez $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b) Etudiez le signe de $f'(x)$ et dressez le tableau de variations de f.

5) Tracez $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Exercice 11

Partie 1 :

g est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 - 2\ln x$$

1) Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$.

2) a) Calculez $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

b) Etudiez le signe de $g'(x)$ et dressez le tableau de variations de g.

3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie 2 :

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{3+2\ln x}{x}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1) Montrez que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ et en déduire une interprétation graphique de ce résultat.

2) a) Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrez que la droite (D) d'équation $y = x - 4$ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrez que pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) a) Montrez que pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$f''(x) = \frac{4\ln x}{x^3}.$$

b) Etudiez le signe de f'' et en déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion que l'on précisera.

c) Donnez une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.

5) Tracez (T) et $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

6) Montrez que la fonction

$$F: x \mapsto \frac{x^2}{2} - 4x + (3+\ln x)\ln x$$

est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Exercice 12

Partie 1 :

g est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$$

1) Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)$.

2) Montrez que pour tout x de $]-1;+\infty[$ on a :

$$g'(x) = \frac{2(x+1)^2+1}{x+1}.$$

3) Etudiez le signe de $g'(x)$ et dressez le tableau de variations de g.

4) a) Calculez $g(0)$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur les deux intervalles $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$.

Partie 2 :

f est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1) Montrez que $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$ et donner une interprétation graphique du résultat.

2) a) Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrez que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

c) Etudiez la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ).

3) a) Montrez que pour tout x de $]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}.$$

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) Représentez la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ).

Partie 3 :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : \ 0 \leq u_n \leq 1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim u_n$.

Exercice 13

I- On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$.

1) Calculer $g'(x)$, puis étudier les variations de la fonction g.

2) Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

II- Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \ \text{ si } \ x > 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue à droite de 0.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

b) Etudier les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

4) a) Démontrer que pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = g(x).$$

b) Dresser le tableau de variations de f.

5) Donner l'équation de la tangente de $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0 = \frac{1}{e-1}$.

6) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

III- On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} 0 < u_0 \leq \frac{1}{e-1} \\ u_{n+1} = f(u_n) \ , \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : \ 0 < u_n \leq \frac{1}{e-1}$.

2) Démontrer que (u_n) est convergente, puis calculer $\lim u_n$.