Série des exercices 02 : Généralités sur les fonctions

▷ Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition et étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{3|x| - 2}$ b) $g(x) = \dfrac{1-x}{x^2 - 6x + 5}$

c) $h(x) = \dfrac{\tan(x)}{1 + \cos(x)}$ d) $k(x) = \dfrac{\sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{1 + x^2}}$

e) $s(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^3 - 1}$ f) $t(x) = \dfrac{x}{|x-1| - |x-7|}$

g) $u(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^4 - x^2 + 1}$ h) $v(x) = \dfrac{\sqrt{|x-3|}}{x^4 - 1}$

i) $i(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-2}$ j) $w(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

▷ Exercice 2

Donner le tableau de variations puis tracer la courbe dans un repère orthonormé pour chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = -2x^2 + 6x - 1$ b) $g(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$

c) $h(x) = \dfrac{x}{x+2}$ d) $k(x) = -\dfrac{x^3}{4}$

e) $s(x) = \sqrt{x-2}$ f) $t(x) = 2|x| + 1$

g) $u(x) = \dfrac{3x}{|x| + 1}$ h) $u(x) = -x^2 + 6|x| + 3$

▷ Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{x - 2}$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Étudier le signe de f sur $\mathcal{D}_f$.
3. Montrer que f est majorée par $\dfrac{2}{3}$
4. $\dfrac{2}{3}$ est-il la valeur maximale absolue de f.
5. Déduire que f est bornée sur $\mathcal{D}_f$.

▷ Exercice 4

Comparer les fonctions f et g dans chacun des cas suivantes :

a) $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ b) $g(x) = 2x - 1$

c) $f(x) = \dfrac{4x-3}{x+1}$ d) $g(x) = 2x - 3$

e) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x + 1}$ f) $g(x) = 3x^2 + 1$

▷ Exercice 5

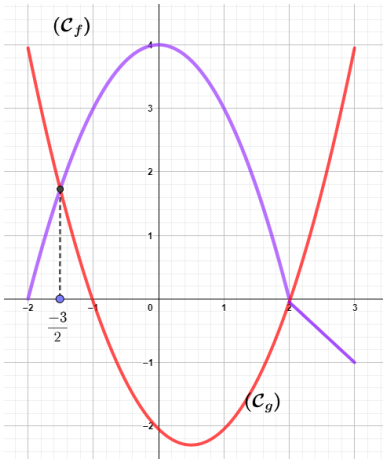
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} - 1}$$

1. Montrer que f est minorée par 4 sur $]1; +\infty[$.
2. 4 est-il la valeur minimale de f. (justifier)

▷ Exercice 6

Soient $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé :



1. Comparer f et g sur $[-2; 3]$
2. En déduire les solutions dans $[-2; 3]$ de :

$$f(x) > g(x)$$

3. Déterminer le signe de chacune des fonctions f et g.
4. Dresser le tableau de variations de f et g.

▷ **Exercice 7**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

1. Étudier la parité de f
2. Montrer que f admet un maximum absolu au point $x_0 = 0$
3. Montrer que $(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2)$:
$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$
4. En déduire tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

▷ **Exercice 8**

f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$

1. La fonction f est-elle paire ? impaire ?
2. Montrer que $f(1)$ est la valeur minimale de f sur $]0;+\infty[$
3. (a) Soit a et b de réels distincts de $\mathbb{R}^*$. Montrer que :
$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = a+b-\frac{2}{ab}$$
   (b) Étudier les variations de f sur chacun des intervalles $[1;+\infty[$ et $]0;1]$ et $]-\infty;0[$
   (c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$.

▷ **Exercice 9**

f définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2}} + \sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer que f est minorée par 2.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ par :
$$g(x) = (f(x))^2$$
   (a) Montrer que $(\forall x, y \in \mathcal{D}_f)$ tel que $a \neq b$:
$$\frac{g(a)-g(b)}{a-b} = \frac{1}{2} - \frac{2}{(a+1)(b+1)}$$
   .
   (b) Étudier les variations de g sur $]-1;1]$ et sur $[1;+\infty[$.
   (c) Déduire les variations de f .

▷ **Exercice 10**

Montrer que l'équation $x^3 + x^2 - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $]0;1[$.

▷ **Exercice 11**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$
1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f.
   (a) Déterminer les points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repères.
   (b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
   (c) Déterminer graphiquement $f([0;2])$.
   (d) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq 0$.
3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = x^2 - 3|x| + 2$$
   (a) Étudier la parité de g.
   (b) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$: $g(x) = f(x)$, puis dresser tableau de variations de g.
   (c) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère.
   (d) Résoudre graphiquement $g(x) \leq 3$

▷ **Exercice 12**

f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

1. Montrer que f est minorée par $-\dfrac{1}{2}$. f atteint un minimum au ce nombre ?
2. Montrer que f est majorée par $\dfrac{1}{2}$. f atteint un maximum au ce nombre ?
3. Soit a et b deux réels distincts .
   (a) Montrer que : $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} = \dfrac{1-ab}{(a^2+1)(b^2+1)}$
   (b) En déduire les variations de f sur chacun des intervalles $[0;1]$ et $[1;+\infty[$
4. Vérifier que f est impaire.
5. Dresser tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

▷ **Exercice 13**

Soient f et g les fonctions définies par :
$$f(x) = x^2 + 2x + 1 \text{ et } g(x) = \sqrt{x+1}$$
1. Calculer $f(0)$ et $g(0)$
2. Étudier les variations de f et g.
3. (a) Tracer les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.
   (b) Résoudre graphiquement : $f(x) \leq g(x)$
4. Soit h la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x) = x + 2 + 2\sqrt{x+1}$
   (a) Vérifier que : $h = fog$
   (b) Étudier les variations de h.

▷ **Exercice 14**

Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+3} \text{ et } g(x) = x^2 + 2x$$

1. Déterminer les variations de f et g.
2. On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = fog(x)$$

   (a) Déterminer $\mathcal{D}_h$.
   (b) Déterminer l'expression de $h(x)$, $(\forall x \in \mathcal{D}_h)$
   (c) Calculer $h(-3)$ et $h(1)$ et interpréter les résultats obtenu graphiquement.
3. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : h(x) < 1$
   (b) Étudier les variations de h sur chacun des intervalles $[-1;+\infty[$ et $]-\infty;-1]$
   (c) En déduire que h est bornée sur $\mathbb{R}$.

▷ **Exercice 15**

f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1 \text{ et } g(x) = \sqrt{x-1}$$

1. Vérifier que $(\mathcal{C}_f)$ et $\mathcal{C}_g)$ se coupent au point $A(2;1)$
2. Construire $(\mathcal{C}_f)$ et $\mathcal{C}_g)$.
3. Résoudre graphiquement : $x^2-2x-1+\sqrt{x-1} < 0$
4. Déterminer graphiquement :

$$f([0;1]) \text{ et } f([1;2])$$

5. h est la fonction définie par :$h(x) = \sqrt{2x-x^2}$
   (a) Déterminer $\mathcal{D}_h$.
   (b) Vérifier que $(\forall x \in \mathcal{D}_h) : h(x) = (gof)(x)$.
   (c) Étudier les variations de h sur $[0;1]$ et sur $[1;2]$

▷ **Exercice 16**

f définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ et montrer que $f(\mathcal{D}_f) = \left[1;\frac{7}{3}\right]$.
2. Déduire la valeur maximale et la valeur minimale absolue de f

---

▷ **Exercice 17**

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $2f(x) - 3f(-x) = x^3 - 2sin(x)$

1. Montrer que f est impaire
2. Déterminer l'expression de $f(x)$.

▷ **Exercice 18**

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{2-x}$$

.

1. Dresser tableau de variations de f .
2. Déterminer la nature et les caractéristiques du courbe $\mathcal{C}_f$.
3. Tracer $\mathcal{C}_f$.
4. On définit g sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{2;-2\}$ par :

$$g(x) = \frac{1-2|x|}{|x|-2}$$

   .
   (a) Étudier les variations de g puis dresser le tableau de variations .
   (b) Déterminer les extremums de g .
   (c) Tracer $\mathcal{C}_g$.
   (d) Discuter graphiquement le nombre des solutions de $g(x) = m$ selon les valeur du paramètre m.

▷ **Exercice 19**

f est définie sur $]0;1[$ par :

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{1-x}\right)$$

1. Montrer que $(\forall x \in]0;1[) : f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2-x}$
2. Soit x et y deux éléments distincts de $]0;1[$
   (a) Montrer que :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{2(x+y-1)}{(x^2-x)(y^2-y)}$$

   .
   (b) Étudier la monotonie de f sur chacun des intervalles $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2};1\right[$ puis dresser le tableau de variations de f .
3. Soit α et β deux réels strictement positifs tels que : $\alpha + \beta = 1$
   Déduire que : $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \geq 9$

Exercices de synthèses

▷ Exercice 20

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

1. Étudier la parité de f et déterminer $f(\mathbb{R})$.
2. Écrire f sous forme de deux fonctions composées puis déduire les variations de f .

▷ Exercice 21

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}\sqrt{|x^2-4x|}$
   Montrer que f est minorée par 0
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = |x| - \sqrt{x^2+1}$
   Montrer que g est bornée

▷ Exercice 22

h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x+2) = \dfrac{1+h(x)}{1-h(x)}$.

1. Déterminer $h(x+4)$ en fonction de $h(x)$.
2. Montrer que h est périodique et déterminer sa période.

▷ Exercice 23

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x+1)f(x)+f(x+1)+1 = f(x)$.

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ f(x)(1+f(x)) \neq 0$
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ f(x+2) = -\dfrac{1}{f(x)}$
3. Déduire que f est périodique et déterminer sa période.

▷ Exercice 24

f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^3+2}$.

1. Étudier les variations de f
2. Montrer que : $f([2;3[) \subset \left]\dfrac{3}{29};\dfrac{1}{5}\right]$

▷ Exercice 25

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{4-x^2}}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ et étudier la parité de f
2. Calculer $(\forall a,b \in \mathcal{D}_f)$: $f(a)^2 - f(b)^2$, et déduire les variations de f.
3. Montrer que f n'est pas majorée sur $\mathcal{D}_f$).

▷ Exercice 26

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{(E(x)-x)^2 + 2E(x)}{x^2}$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Déterminer l'expression de f sur $[1;2[$
3. Étudier la monotonie de f sur $[1;2[$

▷ Exercice 27

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-1)^{E(x)}(x - E(x))$

1. Montrer que f est périodique et déterminer sa période .
2. Construire dans un repère orthonormé $\mathcal{C}_f$) sur $[-2;2[$

▷ Exercice 28

Soit f une fonction telle que :

$$(1)\ (\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2);\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

1. Montrer que $f(0) = 1$
2. Déterminer toutes les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant (1)

▷ Exercice 29

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R});\ xf(1-x) = x - f(x)$$

Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

▷ Exercice 30

Déterminer toutes les fonction réelles f telles que :

$$(\forall x \in \mathbb{R});\ f(1-x) + 2f(x) = x$$

Taher Bouyguir