Série 2 : Généralités sur les fonctions

1ére Bac Sciences expérimentales	Lycée qualifiant Elmaarifa

Exercice 1 :

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 4x - x^2$; $f_2(x) = x^2 + 4x - 5$; $f_3(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$; $f_4(x) = \frac{1-3x}{x^2+4x-5}$

$f_5(x) = \frac{5x^2 - x - 3}{2x^2 + x + 1}$; $f_6(x) = \sqrt{4x - x^2}$; $f_7(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$; $f_8(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$

$f_9(x) = \frac{x+3}{x-1}$; $f_{10}(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$; $f_{11}(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x-1}}$; $f_{12}(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$

Exercice 2 :

Étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$f_1(x) = 2x - 1$; $f_2(x) = x^2 + 8x$; $f_3(x) = x^4 - 3x^2 + 1$; $f_4(x) = 4x^3 - 5x$

$f_5(x) = \frac{5|x|}{x^2 - 1}$; $f_6(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 6|x|$; $f_7(x) = x + \sin x$; $f_8(x) = x \sin x$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1}$.

1) Montrer que f est majorée par 3 sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2) Montrer que f est minorée par 2 sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3\sin^2 x - 2\cos(5x) + 1$.

Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint en 2.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$.

Montrer que f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ atteint en 1.

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{5x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

1) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Étudier la parité de la fonction f.

3) Montrer que : $f(x) = 5 - \frac{3}{x^2+1}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

4) Montrer que f est minorée par 2 sur $\mathcal{D}_f$. Est-ce-que 2 est la valeur minimale de f ?

5) Montrer que f est majorée par 5 sur $\mathcal{D}_f$. Est-ce-que 5 est la valeur maximale de f ?

Exercice 8 :

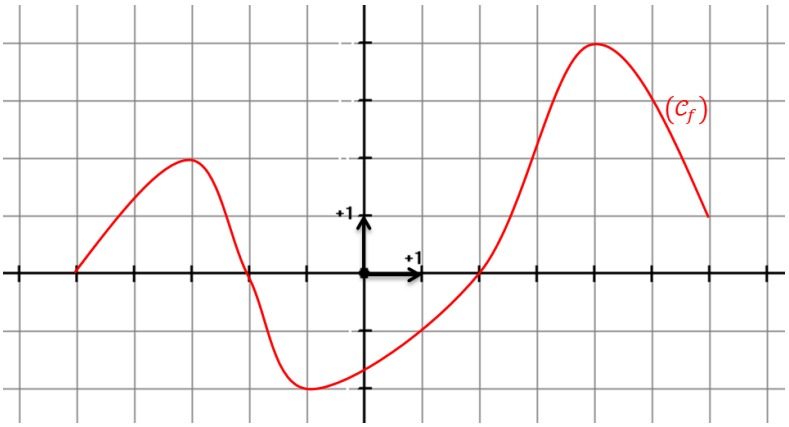
Soit f une fonction dont le tableau de variations est le suivant :

x	-4		-3		1		6
f	2	↘	-1	↗	0	↘	-5

Déterminer : $f([-3;1])$; $f([1;6])$; $f(]-4;-3[)$ et $f([-4;6])$.

Exercice 9 :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [-5;6]$ dont la courbe est la suivante:



1) Déterminer graphiquement : $f(-3)$; $f(1)$; $f(2)$ et $f(6)$.

2) Déterminer les extremums de la fonction f sur l'intervalle I.

3) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle I.

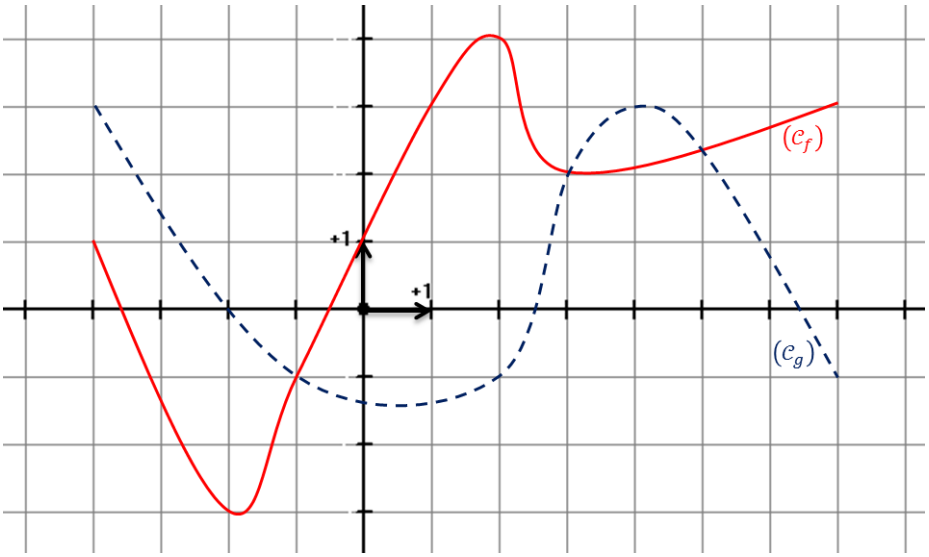
4) Déterminer graphiquement : $f([-5;-3])$; $f([4;6])$; $f(]-1;4[)$ et $f([-5;6])$.

5) Déterminer graphiquement le nombre de solutions des équations : $f(x) = 0$; $f(x) = 1$ et $f(x) = -1$.

6) Résoudre graphiquement les inéquations : $f(x) < 0$ et $f(x) \geq 0$.

Exercice 10 :

Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques de deux fonctions f et g.



1) Quel est l'ensemble de définition des fonctions f et g.

2) Déterminer les extremums de la fonction f.

3) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = g(x)$.

4) Résoudre graphiquement les inéquations : $f(x) < g(x)$ et $f(x) \geq g(x)$.

Exercice 11 :

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \dfrac{3x}{x-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions : f ; g ; $g \circ f$ et $f \circ g$.

2) Déterminer l'expression de $g \circ f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_{g\circ f}$ et $f \circ g\,(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_{f\circ g}$.

Exercice 12 :

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions : f ; g ; $g \circ f$ et $f \circ g$.

2) Déterminer l'expression de $g \circ f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_{g\circ f}$ et $f \circ g\,(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_{f\circ g}$.

Exercice 13 :

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$.

Et soient $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les courbes respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1) Vérifier que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont sécantes au point $A(2;1)$.

2) Représenter les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

3) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x^2 - 2x - 1 + \sqrt{x-1} < 0$

4) Déterminer graphiquement $f([0;1])$ et $f([1;2])$.

5) On considère la fonction numérique h définie par : $h(x) = \sqrt{2x - x^2}$.

a- Déterminer l'ensemble de définition de h.

b- Vérifier que : $h(x) = g \circ f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_h$.

c- Étudier la monotonie de la fonction h sur les intervalles $[0;1]$ et $[1;2]$.

Exercice 14 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + 2 - \sqrt{x+2}$.

1) Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f.

2) a- Développer : $\left(\sqrt{x+2} - \frac{1}{2}\right)^2$.

b- Montrer que : $f(x) \geq -\frac{1}{4}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 2$.

Soient u et v les fonctions définies par : $u(x) = x^2 - x$ et $v(x) = \sqrt{x+2}$.

4) Déterminer les variations de la fonction v sur son ensemble de définition et tracer sa courbe.

5) Déterminer graphiquement : $v\left(\left[-2;-\frac{7}{4}\right]\right)$ et $v\left(\left[-\frac{7}{4};+\infty\right[\right)$.

6) Dresser le tableau de variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$.

7) Vérifier que : $f(x) = u \circ v(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

8) En déduire la monotonie de f sur chacun des intervalles $\left[-2; -\frac{7}{4}\right]$ et $\left[-\frac{7}{4}; +\infty\right[$.

Exercice 15 :

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$,

et soient $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les courbes respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1) Dresser le tableau de variations des fonctions f et g.

2) Calculer $f(3)$ et $g(3)$ puis représenter les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

3) On considère dans l'intervalle $]1; +\infty[$ l'inéquation : **(1)**: $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 < 0$

a- Vérifier que : $(\forall x \in]1; +\infty[) : x^3 - 5x^2 + 8x - 6 < 0 \iff f(x) < g(x)$

b- Résoudre graphiquement l'inéquation **(1)**.

4) On considère la fonction h définie sur $]2; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{x^2-4x+6}{(x-2)^2}$.

a- Déterminer graphiquement $f(]2; +\infty[)$.

b- Vérifier que : $h(x) = g \circ f(x)$ pour tout $x \in]2; +\infty[$.

c- Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

Exercice 16 :

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3$ et $g(x) = \dfrac{x+6}{2x-2}$.

Et soient $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les courbes respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1) a- Déterminer $\mathcal{D}_g$ et vérifier que : $\forall x \in \mathcal{D}_g : g(x) = \frac{1}{2} + \frac{7}{2(x-1)}$

b- Calculer : $f(2)$; $f(-1)$; $f(-2)$; $g(2)$; $g(-2)$ et $g(-1)$.

2) a- Dresser le tableau de variations des fonctions f et g.

b- Représenter les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

3) Vérifier graphiquement que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont sécantes en deux points, l'abscisse de l'un des deux α appartient à l'intervalle $]-2; -1[$.

4) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

5) a- Déterminer graphiquement $g([2; +\infty[)$.

b- Étudier la monotonie de la fonction $f \circ g$ sur $[2; +\infty[$.