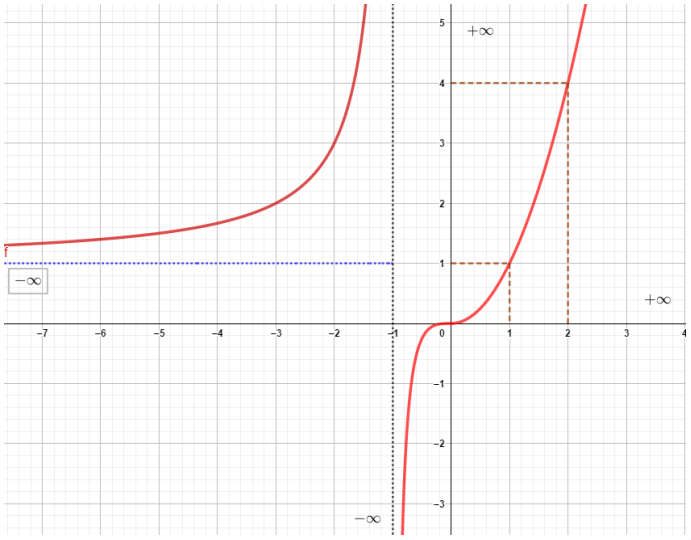
Série $n°2$ - Limite d'une fonction numérique - 1BACSEG

Exercice $n°1$: Lecture graphique de limites

La figure suivante représente la courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'une fonction numérique f , Déterminer, par lecture graphique, les limites suivantes :



a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim_{x\to 1} f(x)$

c) $\lim_{x\to 2} f(x)$ d) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$

e) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ f) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

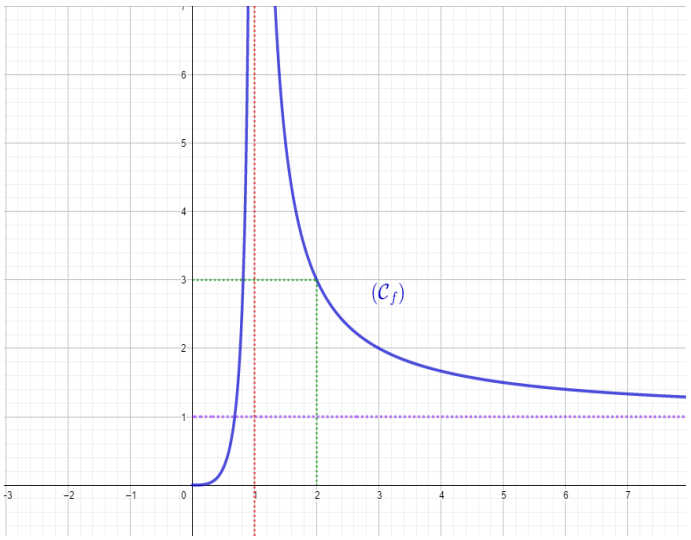
g) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{f(x)}$ h) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

i) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{f(x)}$ j) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{f(x)-4}$

k) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{f(x)-1}$

Exercice $n°2$: Lecture graphique de limites

La figure suivante représente la courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'une fonction numérique f , Déterminer, par lecture graphique, les limites suivantes :



a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim_{x\to 1} f(x)$

c) $\lim_{x\to 2} f(x)$ d) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$

e) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ f) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

g) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{f(x)}$ h) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

i) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{f(x)}$ j) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{f(x)-4}$

k) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{f(x)-1}$

Exercice $n°3$:

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|+1}{|x-2|}$ b) $\lim_{x\to 1^1} \sqrt{\frac{2x}{1-x}}$ c) $\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{\sqrt{|x+3|}}$

d) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ e) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$ f) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1}$

g) $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ h) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-2x}$ i) $\lim_{x\to \sqrt{3}} \frac{x^2-3}{\sqrt{x^2+3}-3}$

j) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-2\sqrt{x}}{x}$ k) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ l) $\lim_{x\to -\infty} (1-2x^2)(1+3x)$

m) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{4x}{1-2x}\right)^3$ n) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ o) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

p) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} - \sqrt{x+2}$ q) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+1} - 3x$ r) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}+x}$

Exercice $n°4$: limite et encadrement

I) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $f(x) \leqslant \frac{1}{2}x$

b) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$

II) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \sqrt{1+x^2} - x$$

a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$, $g(x) \leqslant \frac{1}{2x}$

b) Calculer les limites $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$

III) v est la fonction définie par : $v(t) = \frac{-2t^2+t-6}{t^2+3}$

a) Montrer que $(\forall t \in \mathbb{R}^{*+})$, $|v(t)+2| \leq \frac{1}{t}$

b) Déduire $\lim_{t\to+\infty} v(t)$

IV) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(s) = \frac{\sqrt{1+s}-1}{s}$$

a) Montrer que $(\forall s \in [-1;0[\cup]0;+\infty[)$, $\left|g(s) - \frac{1}{2}\right| \leqslant |s|$

b) Déduire : $\lim_{s\to 0} g(s)$.

V)

a) Montrer que $(\forall x \in [1;+\infty[)$, $x-1 \leqslant \sqrt{x^2-x+1}$

b) Déduire $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1}$

VI)

a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$, $\left|\frac{2x}{1+x^2} - 1\right| \leq (x-1)^2$

b) Déduire : $\lim_{x\to 1} \frac{2x}{1+x^2} = 1$.

Exercice $n°5$:

I) Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty$ par :

▸ Pour tout $x \geq 2$, $\frac{1}{x^2} \leq h(x) \leq \frac{1}{x}$, et ▸ Pour tout $x \in]0;2]$, $\frac{1}{x} \leq h(x) \leq \frac{1}{x^2}$

a) Peut-on en déduire la limite de h en $+\infty$? , si oui, la donner en justifiant la réponse .

b) Peut-on en déduire la limite de h en 0^+ ? , si oui, la donner en justifiant la réponse .

II) Soit S la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3}$

a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})$, $\frac{4}{x+3} \leq S(x) \leq \frac{4}{x}$

b) Déduire que $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice $n°6$:

I) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

a) Calculer les limites : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) Calculer les limites : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) Calculer les limites : $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ et $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)$ et $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}$

II) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{4x^2+4x+5}$

a) Calculer les limites : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

b) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$, $g(x) - 2x = \frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+2}$ et déduire la limite : $\lim_{x\to+\infty}(g(x)-2x)$

c) Calculer les limites : $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ et $\lim_{x\to-\infty}(g(x)+2x)$.

Bon Courage - Bouyguir Taher