Professeur : Taher BOUYGUIR Lycée Mohamed VI	Notions de logique Série 01	1BAC SE 2022-2023

EXERCICE 01

Écrire les propositions et les phrases suivantes à l'aide des connecteurs logiques et des quantificateurs.

P_1: « pour tout réel , il existe un unique entier relatif p tel que $p \leq x < p+1$ »
P_2: « il existe au moins un élément réel a tel que pour tout x de $\mathbb{R}^+$ ona : $a \leq x$ »
P_3 : « pour tout a et b de $\mathbb{R}$ ona : $(a+b)^2 \geq 4ab$ »
P_4 : « tout entier naturel n divisible par 4 est un nombre pair »
P_5 : « pour tout ε de $\mathbb{R}^{+*}$, il existe au moins α de $\mathbb{R}^{+*}$ tel que pour tout x de $\mathbb{R}$,ona si $|x-1| < \alpha$ alors $\left|\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ »

EXERCICE 02

Soit *P* la proposition suivant :

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}): \frac{4xy}{4+x^2} > 1$$

1) Donner la négation de la proposition .
2) En déduire que *P* est fausse .

EXERCICE 03

Soit *P* la proposition suivant :

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}): x^2 + xy + y^2 = 0$$

1) Déterminer la négation de la proposition .
2) Montrer que *P* est fausse .

EXERCICE 04

Donner la négation des propositions suivantes :
P : $(\forall x \in \mathbb{R})(x \geq 0 \ ou \ x \leq 0)$
Q : $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 > 5 \ et \ x \epsilon \mathbb{Z})$
R : $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R});\ |xy| = xy \Rightarrow (x+y)^2 \geq x^2 + y^2$
S : $(\forall a \in \mathbb{R});\ a^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$.
T : $\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{5}$
U : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 \geq ab \ ou \ |a| + |b| \geq |a+b|$
V : $(\forall x \in \mathbb{N}^*);\ (x \neq 1 \Rightarrow x \geq 2)$.
M : $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R});\ (x \leq y \ ou \ x^2 y + y = 1)$
N : $(\forall x \in \mathbb{R}): \sqrt{1+x^2} - |x| \geq 0$

EXERCICE 05

1) Soit $p \ et \ q \ et \ r$ des propositions .

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques .

$$[p \ et (q \ ou \ r)] \Leftrightarrow [(p \ et \ q) ou \ (p \ et \ r)]$$
$$[p \ ou \ (q \ et \ r)] \Leftrightarrow [(p \ ou \ q) et \ (p \ ou \ r)]$$

EXERCICE 06

En utilisant le Résonnement par disjonction des cas :

- résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivant $x^2 + |x-5| + 5 = 0$
- Montrer que $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$
- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ \sqrt{x^2+1} + x > 0$
- Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n \epsilon \mathbb{N}$.

EXERCICE 07

En utilisant le raisonnement par contraposée. Montrer que :

1) $(\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R});\ y \neq 1 \ et \ x \neq 1 \Rightarrow 1 + xy \neq x + y$
2) $(\forall x \in \mathbb{R});\ x \neq 0 \ \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}$
3) $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*);\ y \neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7$
4) x est un nombre positif .

$$x \neq 0 \ \Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}} \neq 1 - \sqrt{x}$$

EXERCICE 10

En utilisant le raisonnement par équivalence :

1) Soient a , $b et \ c$ des réels.
   Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$
2) Montrer que : $(a^3 + a = b^3 + b) \Leftrightarrow a = b$
3) Soit $\mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2 - x + 1} \leq \frac{4}{3}\sqrt{x}$$

4) Soient $x \ et \ y$ deux réels positifs . Montrer que :

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow (x = 0 \ ou \ y = 0)$$

5) Soient x un nombre réel , Montrer que :

$$|x-2| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{11} < \frac{1}{x+2} < \frac{3}{13}$$

EXERCICE 08

En utilisant le raisonnement par absurde :

1) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ puis en déduire que $(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}$.
2) Montrer que 0 n'est pas une racine du polynome $P(x) = x^4 + 12x - 1$
3) x , y et z des nombres réels tels que :
$$x + y + z > 1$$
Montrer que
$$x > \frac{1}{3}\ ou\ y > \frac{1}{3}\ ou\ z > \frac{1}{3}$$
4) On considère les deux fonctions f et g définies par : $g(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ et $f(x) = x + 2$
Montrer que (C_f) $et (C_g)$ ne sont pas sécantes.

EXERCICE 09

En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que :

1) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) : 1 + 2 + 2^2 + \cdots\cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
2) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$:
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
3) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$
$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots\cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
4) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$
$$1 + 3 + 5 + \cdots\cdots + (2n+1) = (n+1)^2$$
5) $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$: « 9 divise $4^n + 6n - 1$ »
6) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$: « $10^n - 1$ est divisible par 9 »
7) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$: « $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 »
8) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$:
$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$
9) $(\forall n \epsilon \mathbb{N})$: « 17 $divise$ $21^n - 2^n$ »
10) $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) : 3^n \geq 2n + 1$

EXERCICE 11

1) Soient a et b deux nombres rationnelles tels que $a + b\sqrt{2} = 0$ Montrer que $a = 0$ et $= 0$.
2) En déduire que $(x, y, x', y') \in \mathbb{Q}^4$
$$x + y\sqrt{2} = x' + y'\sqrt{2} \Rightarrow x = x'\ et\ y = y'$$

EXERCICE 12

En utilisant le raisonnement par contre exemple.

1) Montrer que $(\forall n \epsilon \mathbb{N})(\exists y \epsilon \mathbb{N}) : y \leq n$.
2) Soient a , b, c et d des nombres réels.
Montrer que la proposition
$$(a \neq b\ et\ c \neq d) \Rightarrow (a + c \neq b + d)$$
Est une proposition fausse.
3) Montrer que la proposition
$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); x + \frac{1}{x} \geq 2$$
Est fausse .

EXERCICE 13

En utilisant raisonnement par implications successives .

1) Soit x un nombre réel . Montrer que :
$$2 < x < 4 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$$
2) Montrer que :
$$(\forall x \in \mathbb{R});\ \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x}\right) \Rightarrow x = 0$$
3) Montrer que
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2\ ,\ a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0\ ou\ b = 0$$
4) Soient x et y deux nombres réels positifs.
Montrer que :
$$\left(x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}\right) \Rightarrow (x = y = 1)$$