Exercice 01 :

À l'aide des quantificateurs et connecteurs logiques, écrire les propositions suivantes :

P : « le carré de tout nombre réel est toujours un nombre réel positif »

Q : « l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet au moins une solution réelle »

R:«il n'existe aucun nombre rationnel x tel que $x^2 = 3$ »

S : « il existe au moins un réel$a$, tel que pour tout réel x positif on a $a \leq x$ »

Exercice 02

1) Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes s'il est possible

P: "$(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - x + 1 < 0$"

Q: "$(\exists x \in \mathbb{Q}); 2x^2 + 3x = 0$"

R: "$(\forall x \in \mathbb{Z}); (\exists y \in \mathbb{N}); x^2 + y^2 \geq 1$"

V; "$(\exists y \in \mathbb{Z}); (\forall x \in \mathbb{N}^*); x + y = 0$"

$$S: "(\exists p \in \mathbb{Z}); \frac{8}{p+4} \in \mathbb{N}"$$

$$T: "(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2"$$

U: "$(\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq cos(x) \leq 1$"

Exercice 03 : Raisonnement par disjonction des cas

En utilisant le résonnement par disjonction des cas :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + |x-5| - 5 = 0$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 2|x-1| - y = 0 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$
3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$

Exercice 04 : Raisonnement par contraposée

En utilisant le raisonnement par contraposée Montrer que :

1) $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}); \left(x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x}{x+1} \neq 1\right)$

2) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); \left(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1 \Rightarrow 1 + xy \neq x + y\right)$

3) $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*); \left(y \neq \frac{-3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7\right)$

4) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); \left(x \neq y \Rightarrow (x-1)(y+1) \neq (x+1)(y-1)\right)$

5) $(\forall x \in \mathbb{R}); (x \neq -2 \Rightarrow x^3 + 2x^2 + x + 2 \neq 0)$

Exercice 05 : Raisonnement par équivalence :

1) Soient $a; b \text{ et } c$ des réels.

Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

2) Soit$x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :$\frac{\sqrt{x}}{x^2 - x + 1} \leq \frac{4}{3}\sqrt{x}$

3) Soient x et y deux réels positifs . Montrer que :$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow (x = 0 \; ou \; y = 0)$

4) Soient x un nombre réel , Montrer que :$|x-2| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{13} < \frac{1}{x+2} < \frac{3}{11}$

5) Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R}^+); (\forall b \in \mathbb{R}^+)$

$2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = a + b + 2 \Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = 1$

Exercice 06 :Raisonnement par contre-exemple

1) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); 2x - 4 > 0$est une proposition fausse

2) Montrer que $a \neq b \text{ et } c \neq d \Rightarrow a + c \neq b + d$ est une proposition fausse

3) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*); x + \frac{1}{x} \geq 2$ est fausse

Exercice 07 : Raisonnement par absurde

1) Montrer que 0 n'est pas une racine du polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x - 1$
2) Soit ABC un triangle qui a pour dimension$AB = 3$ $AC = 4$ et $BC = 6$. Montrer que le triangle ABC n'est pas rectangle en A
3) $(\forall x \in \mathbb{R}^*). \sqrt{1 + \frac{2x^2}{3}} \neq 1 + \frac{x^2}{3}$
4) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
5) Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $b \notin \mathbb{Q}$. montrer que $a + b \notin \mathbb{Q}$
6) Montrer que le système $\begin{cases} 2x - 3z > 3 \\ 3y - 2x \geq 3 \\ y - z \leq 2 \end{cases}$ n'admet pas de solution.

Exercice 08 : Raisonnement par récurrence

Montrer que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 + 2 + 2^2 + \cdots\cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
2) $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
3) $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots\cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
4) $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1 + 3 + 5 + \cdots\cdots + (2n+1) = (n+1)^2$
5) $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
6) $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 10^n - 1$ est divisible par 9
7) $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7