Série 1 : Notions de logique

1 Bac Sciences expérimentales

Exercice 1 : Les propositions – les quantificateurs

Écrire les propositions suivantes à l'aide des connecteurs logiques et des quantificateurs ; et dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.

P_1: " le carré de tout nombre réel non nul est strictement positif "

P_2: " il existe au moins un nombre rationnel dont le carré vaut deux "

P_3: " il existe au moins un réel a tel que pour tout x de $\mathbb{R}^+$ on a : $a \leq x$ "

P_4 : " pour tout réels a et b on a : $(a+b)^2 \geq 4ab$ "

P_5: " pour tout réel x, il existe un unique entier relatif p tel que : $p \leq x < p+1$ "

P_6: " Si un nombre réel x inférieur à -1 alors il est strictement négatif "

P_7: " le produit de deux réels est nul si et seulement si l'un d'entre eux est nul "

P_8 : " Il n'existe pas un nombre rationnel solution de l'équation $x^2 - 5 = 0$ "

Exercice 2 :

Soit P la proposition suivante :

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}): \frac{4xy}{4+x^2} > 1$$

1) Donner la négation de la proposition P.

2) En déduire que P est fausse.

Exercice 3 :

Soit P la proposition suivante :

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}): x^2 + xy + y^2 = 0$$

1) Déterminer la négation de la proposition P.

2) Montrer que P est fausse.

Exercice 4 :

Donner la négation des propositions suivantes :

M : $(\forall x \in \mathbb{R}): \sqrt{1+x^2} - |x| \geq 0$

N : $(\exists x \in \mathbb{R})(\ x^2 > 5 \ et \ x \in \mathbb{Z}\ )$

P : $(\forall x \in \mathbb{R})(\ x \geq 0 \ ou \ x \leq 0\ )$

Q : $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R});\ (\ x \leq y \ ou \ x^2 y + y = 1\ ).$

R : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2: a^2 + b^2 \geq ab \ ou \ |a| + |b| \geq |a+b|$

S : $\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{5}$

T : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ (\ n \neq 1 \ \Rightarrow \ n \geq 2\ )$

U : $(\forall a \in \mathbb{R});\ (\ a^2 \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ a \in \mathbb{Z}\ )$

V : $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R});\ (|xy| = xy \Rightarrow (x+y)^2 \geq x^2 + y^2)$

Lycée qualifiant Almaarifa

Exercice 5 :

1) Soit $p \ et \ q \ et \ r$ des propositions.

Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques.

$$[p \ et \ (q \ ou \ r)] \Leftrightarrow [(p \ et \ q) \ ou \ (p \ et \ r)]$$

$$[p \ ou \ (q \ et \ r)] \Leftrightarrow [(p \ ou \ q) \ et \ (p \ ou \ r)]$$

2) *a-* Développer $(x-1)(y-2)$.

b- Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} xy - y + 2 - 2x = 0 \\ yx^2 - (y^2+1)x + y = 0 \end{cases}$$

Exercice 6 : Raisonnement par disjonction des cas

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$x^2 + |x-5| + 5 = 0$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} 2|x+1| - y = 4 \\ |x+2| + 2y = 6 \end{cases}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} > x + 2$$

4) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ \sqrt{x^2+1} + x > 0$

5) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$

6) Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 : Raisonnement par la contraposée

Montrer que :

1) $(\forall x \in \mathbb{R});\ x \neq 0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{1+\sqrt{x}} \neq 1 - \sqrt{x}.$

2) $(\forall x \in \mathbb{R});\ x \neq 0 \ \Rightarrow \ \sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}.$

3) $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall y \in \mathbb{R}^*);\ y \neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7.$

4) $(\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})$;

$$x + y \leq z \ \Rightarrow \left(x \leq \frac{1}{2}z \ ou \ y \leq \frac{1}{2}z\right)$$

5) $(\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R});(y \neq 1 \ et \ x \neq 1) \Rightarrow 1 + xy \neq x + y$

6) $a \ et \ b$ deux nombres réels.

$$(ab \neq 1 \ et \ a \neq b) \Rightarrow \frac{a}{a^2+a+1} \neq \frac{b}{b^2+b+1}$$

Exercice 8 : Raisonnement par l'absurde

1) Montrer que 0 n'est pas une racine du polynôme : $P(x) = x^4 + 12x - 1.$

2) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$: $\sqrt{1+x^2} \neq 1 + \frac{x^2}{2}$

www.proftaher.com

3) Soient x , y et z des nombres réels.

Montrer que le système $\begin{cases} 2x-3z>3 \\ 3y-2x\geq 3 \\ y-z\leq 2 \end{cases}$ n'admet pas de solution.

4) x , y et z des nombres réels tels que : $x+y+z>1$

Montrer que : $x>\frac{1}{3}$ ou $y>\frac{1}{3}$ ou $z>\frac{1}{3}$

5) a et b deux nombres réels tels que :

$$(\forall x\in\mathbb{R});\ a\leq x\ \Rightarrow\ b<x$$

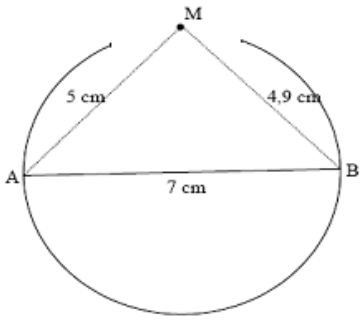
Montrer que : $a>b$

6) On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$g(x)=\sqrt{x^2+4x+5}\ \text{ et }\ f(x)=x+2$$

Montrer que (C_f) et (C_g) ne sont pas sécantes.

7) Le point M appartient-il au cercle de diamètre $[AB]$?



Exercice 9 : Raisonnement par contre-exemple

1) Montrer que la proposition :

$(\forall x\in\mathbb{R});\ (x+3)^2=x^2+9$ est fausse.

2) Montrer que la proposition : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*);\ \frac{1}{x}\leq x$ est fausse.

3) Montrer que la proposition :

$(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R});\ 2x-4y\neq 5$ est fausse.

4) Soient a , b, c et d des nombres réels.

Montrer que la proposition

$$(a\neq b\ et\ c\neq d)\ \Rightarrow\ (a+c\neq b+d)$$

est une proposition fausse.

Exercice 10 : Raisonnement par implication

1) Soit x un nombre réel. Montrer que :

$$2<x<4\ \Rightarrow -3<\frac{-3}{x-1}<-1$$

2) a) Montrer que

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a^2+b^2=0\ \Rightarrow\ (a=0\ et\ b=0)$$

b) Soient x et y deux nombres réels positifs.

Montrer que :

$$(x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y})\ \Rightarrow\ (x=y=1)$$

3) Montrer que si $x\in\mathbb{Q}$ et $y\in\mathbb{Q}$ alors : $x+y\in\mathbb{Q}$.

Exercice 11 : Raisonnement par équivalence

1) Soit x un nombre réel. Montrer que :

$$|x-2|<\frac{1}{3}\ \Leftrightarrow\ \frac{3}{13}<\frac{1}{x+2}<\frac{3}{11}$$

2) Soient x et y deux réels positifs. Montrer que :

$$\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\ \Leftrightarrow\ (x=0\ ou\ y=0)$$

3) Soit x un nombre réel. Montrer que :

$$(x\neq\sqrt{3}\ et\ x\neq-\sqrt{3})\ \Leftrightarrow\ \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\neq 1$$

4) Soit $x\in\mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2-x+1}\leq\frac{4}{3}\sqrt{x}$$

5) Soient a , b et c des réels.

Montrer que : $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$

Exercice 12 : Raisonnement par récurrence

En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que :

1) $(\forall n\in\mathbb{N})$:

$$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^n=2^{n+1}-1$$

2) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$:

$$1+3+5+\cdots\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$$

3) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

4) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$:

$$1\times 2+2\times 3+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

5) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

6) $(\forall n\in\mathbb{N})$: « 9 divise 4^n+6n-1 »

7) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: « 10^n-1 est divisible par 9 »

8) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: « 7^n-2^n est divisible par 5 »

9) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: « $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7 »

10) $(\forall n\in\mathbb{N})$: « $4^{2n+2}-1$ est divisible par 15 »

11) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: « 11 divise $3^{2n}+2^{6n-5}$ »

12) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $3^n\geq 2n+1$

13) $(\forall n\in\mathbb{N})$: $\left(\frac{3}{2}\right)^n\geq 1+\frac{n}{2}$

14) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $3^n\geq 2n+1$

15) $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}$