Exercice 1

Soient F et G deux fonctions définies par : $F(x)=\frac{1}{x^2+1}$ et $G(x)=\frac{5+3x^2}{2(x^2+1)}$.

Montrer que F et G sont deux fonctions primitives de la même fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soient F et G deux fonctions définies par : $F(x)=\frac{x^2+5x-9}{x-2}$ et $G(x)=\frac{x^2+x-1}{x-2}$.

Montrer que F et G sont deux fonctions primitives de la même fonction f sur $]2;+\infty[$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=3x-1+\frac{2}{x^2}$.

Déterminer la primitive F de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 4

On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x(x^2+1)^3$ et $g(x)=\frac{x^3}{(x^4+2)^2}$.

① Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\frac{1}{8}(x^2+1)^4$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

② Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x)=\frac{-1}{4(x^4+2)}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

③ En déduire une des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $3f+2g$.

④ Déterminer la fonction primitive L de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la condition $L(0)=2$.

⑤ Déterminer la fonction primitive K de g sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la condition $K(1)=2$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie par : $f(x)=(x-4)\sqrt{3-x}$.

① Montrer que le domaine de définition de la fonction f est : $\mathcal{D}=]-\infty;3]$.

② Montrer que $\forall x\in]-\infty;3[: f'(x)=\frac{10-3x}{2\sqrt{3-x}}$.

③ En déduire les primitives de la fonction g définie sur l'intervalle $]-\infty;3[$ par : $g(x)=\frac{10-3x}{\sqrt{3-x}}$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x}}$.

① Montrer que le domaine de définition de la fonction f est : $\mathcal{D}=]0;+\infty[$.

② Montrer que $\forall x\in]0;+\infty[: f'(x)=\frac{2x-1}{2x\sqrt{x}}$.

③ Déterminer la fonction primitive G de la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$g(x)=\frac{2x-1}{x\sqrt{x}}$ et qui vérifie la condition $G(1)=2$.

Exercice 7

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x\sqrt{x}$.

① Calculez la dérivée de g sur $]0;+\infty[$.

② soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

Déduisez de la première question une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2x^3-4x^2+2x-3}{(x-1)^2}$.

① Vérifier que pour tout x de $]1;+\infty[$: $f(x)=2x-\frac{3}{(x-1)^2}$

② En déduire la primitive F de la fonction f qui vérifie $F(2)=-1$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-3;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2x^3+13x^2+24x+2}{(x+3)^2}$.

① Déterminer les réels a; b et c tels que, pour tout $x\neq -3$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+3)^2}$.

② En déduire une primitive F de f sur $]-3;+\infty[$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $]0;1[$ par : $f(x)=\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.

① Déterminer deux réels a et b tels que : $f(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(x-1)^2}$ pour tout x de $]0;1[$.

② En déduire la primitive F de f sur $]0;1[$ vérifiant la condition $F\left(\frac{1}{2}\right)=6$.

Exercice 11

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^4}$.

① Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x\neq -1$: $f(x)=\frac{a}{(x+1)^3}+\frac{b}{(x+1)^4}$.

② En déduire une primitive F de f sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 12

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{3x+4}{(x+1)^3}$.

① Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x\neq -1$: $f(x)=\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{(x+1)^3}$.

② En déduire une primitive F de f sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 13

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$.

① Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x de $]1;+\infty[$: $f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x+1)^2}$.

② En déduire une primitive F de f sur $]1;+\infty[$.

Exercice 14

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^3+3x}{(x^2-1)^3}$.

① Montrer que, pour tout x de $]1;+\infty[$: $f(x)=\frac{1}{2(x-1)^3}+\frac{1}{2(x+1)^3}$.

② En déduire une primitive F de f sur $]1;+\infty[$.

Exercice 15

Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{x-5}}$; $I=]5;+\infty[$ $f_2(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$; $I=\mathbb{R}$

$f_3(x)=\frac{x^2-2x}{\sqrt{x^3-3x^2}}$; $I=]3;+\infty[$ $f_4(x)=\frac{3}{(2x+8)^2}$; $I=]-4;+\infty[$

$f_5(x)=\frac{x+2}{(x^2+4x+7)^3}$; $I=\mathbb{R}$ $f_6(x)=\frac{3}{(x-2)^3}+\frac{1}{(x-2)^2}$; $I=]2;+\infty[$

Exercice 16

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x)=x+1$ $f_2(x)=3x^2-4x$ $f_3(x)=x^2+2x-1$ $f_4(x)=5x^7-3x^4+5$

$f_5(x)=-\frac{1}{x^2}$ $f_6(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $f_7(x)=(2x-1)(x^2-x)^3$ $f_8(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 17

Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

$f_1(x)=3x^2-x+2$ $f_2(x)=2x^3(x-4)$ $f_3(x)=\frac{7}{x^2}-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^3}$

$f_4(x)=(x-5)^7$ $f_5(x)=(4x^3-5)(x^4-5x)^4$ $f_6(x)=x^2(x^3-5)^8$

$f_7(x)=\frac{3}{(5+3x)^2}$ $f_8(x)=\frac{2020}{(x+3)^5}$ $f_9(x)=\frac{3x^2-7x}{(2x^3-7x^2+9)^3}$

Exercice 18

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x)=x^4-4x^3+x^2$ $f_2(x)=\frac{x^2-2x+6}{3}$ $f_3(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ $f_4(x)=\frac{2}{x^3}$

$f_5(x)=\frac{1}{x^5}$ $f_6(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{4}{x^5}$ $f_7(x)=\frac{3x^2+1}{x^4}$ $f_8(x)=\frac{2(x^4-1)}{x^3}$

Exercice 19

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x)=(x+3)^2$ $f_2(x)=(x+3)^5$ $f_3(x)=(2x-5)^3$ $f_4(x)=(2x-5)^7$

$f_5(x)=2x(1+x^2)$ $f_6(x)=2x(1+x^2)^7$ $f_7(x)=x(1-x^2)^7$ $f_8(x)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x}-1\right)^3$

Exercice 20

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x)=\frac{1}{(x+3)^2}$ $f_2(x)=\frac{1}{(x+3)^5}$ $f_3(x)=\frac{1}{(2x-5)^3}$ $f_4(x)=\frac{1}{(2x-5)^7}$

$f_5(x)=\frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}$ $f_6(x)=\frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$ $f_7(x)=\frac{x}{(x^2-1)^7}$ $f_8(x)=\frac{4x^2}{(x^3-8)^3}$

Exercice 21

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x)=\frac{2}{\sqrt{2x+6}}$ $f_2(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$ $f_3(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ $f_4(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f_5(x)=\frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}$ $f_6(x)=\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ $f_7(x)=\sqrt{x+1}-\frac{x}{\sqrt{x+1}}$

Indications aux solutions

Exercice 1 et 2

Montrer que $F - G$ est une constante réelle.

Exercice 3

On trouve : $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{2}{x} - 3$.

Exercice 4

① On montre que : $\forall x \in \mathbb{R} : F'(x) = f(x)$.

② On montre que : $\forall x \in \mathbb{R} : G'(x) = g(x)$.

③ $3F + 2G$.

④ On trouve : $\forall x \in \mathbb{R} : L(x) = \frac{1}{8}(x^2+1)^4 + \frac{15}{8}$.

⑤ On trouve : $\forall x \in \mathbb{R} : K(x) = \frac{-1}{4(x^4+2)} + \frac{25}{12}$.

Exercice 5

③ On trouve : $\forall x \in]-\infty ; 3[$:

$$G(x) = \frac{1}{2}(x-4)\sqrt{3-x} + c \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6

③ On trouve : $\forall x \in]0; +\infty[$:

$$G(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7

① On trouve : $\forall x \in]0; +\infty[: g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

② On trouve : $\forall x \in]0; +\infty[: F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

Exercice 8

② On trouve : $\forall x \in]1; +\infty[: F(x) = x^2 + \frac{3}{x-1} - 8$.

Exercice 9

① On trouve : $a = 2; b = 1$ et $c = -7$.

② On trouve : $\forall x \in]-3; +\infty[: F(x) = x^2 + x + \frac{7}{x+3}$.

Exercice 10

① On trouve : $a = -1$ et $b = 1$.

② On trouve : $\forall x \in]-3; +\infty[: F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + 2$.

Exercice 11

① On trouve : $a = 1$ et $b = 1$.

② On trouve : $\forall x \in]-1; +\infty[$:

$$F(x) = \frac{-1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)^3}.$$

Exercice 12

① On trouve : $a = 3$ et $b = 1$.

② On trouve : $\forall x \in]-1; +\infty[: F(x) = \frac{-3}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2}$.

Exercice 13

① On trouve : $a = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{1}{4}$.

② On trouve : $\forall x \in]-1; +\infty[$:

$$F(x) = \frac{-3}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)^2}.$$

Exercice 14

② On trouve : $\forall x \in]-1; +\infty[$:

$$F(x) = \frac{-1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4(x+1)^2}.$$

Exercice 15

$F_1(x) = 2\sqrt{x-5} + c$; $F_2(x) = \sqrt{x^2+3} + c$

$F_3(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3-3x^2} + c$; $F_4(x) = \frac{3}{2(2x+8)} + c$

$F_5(x) = \frac{-1}{4(x^2+4x+7)} + c$; $F_6(x) = \frac{-3}{2(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} + c$

Exercice 16

$F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$; $F_2(x) = 3x^3 - 2x^2$

$F_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$; $F_4(x) = \frac{5}{8}x^8 - \frac{3}{5}x^5 + 5x$

$F_5(x) = \frac{1}{x}$; $F_6(x) = 2\sqrt{x}$

$F_7(x) = \frac{1}{4}(x^2-x)^4$; $F_8(x) = 2\sqrt{x^2+1}$

Exercice 17

$F_1(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + c$; $F_2(x) = \frac{2}{5}x^5 - 2x^4 + c$

$F_3(x) = \frac{-7}{x} - 2\sqrt{x} - \frac{1}{2x^2} + c$; $F_4(x) = \frac{1}{8}(x-5)^8 + c$

$F_5(x) = \frac{1}{5}(x^4-5x)^5 + c$; $F_6(x) = \frac{1}{3}(x^3-5)^9 + c$

$F_7(x) = \frac{-1}{5+3x} + c$; $F_8(x) = \frac{-505}{(x+3)^4} + c$

$F_9(x) = \frac{-1}{4(2x^3-7x^2+9)^2} + c$

Exercice 18

$F_1(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3$; $F_2(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x$

$F_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$; $F_4(x) = \frac{-1}{x^2}$

$F_5(x) = \frac{-1}{4x^4}$; $F_6(x) = \frac{-1}{2x^2} + \frac{1}{x^4}$

$F_7(x) = \frac{-3}{x} - \frac{1}{3x^3}$; $F_8(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Exercice 19

$F_1(x) = \frac{1}{3}(x+3)^3$; $F_2(x) = \frac{1}{6}(x+3)^6$

$F_3(x) = \frac{1}{8}(2x-5)^4$; $F_4(x) = \frac{1}{16}(2x-5)^8$

$F_5(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^2$; $F_6(x) = \frac{1}{8}(1+x^2)^8$

$F_7(x) = -\frac{1}{16}(1-x^2)^8$; $F_8(x) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}-1\right)^4$

Exercice 20

$F_1(x) = \frac{-1}{x+3}$; $F_2(x) = \frac{-1}{4(x+3)^4}$

$F_3(x) = \frac{-1}{4(2x-5)^2}$; $F_4(x) = \frac{-1}{12(2x-5)^6}$

$F_5(x) = \frac{-1}{x^2-x+3}$; $F_6(x) = \frac{-1}{2(x^2-2x-3)}$

$F_7(x) = \frac{-1}{12(x^2-1)^6}$; $F_8(x) = \frac{-2}{3(x^3-8)^2}$

Exercice 21

$F_1(x) = 2\sqrt{2x+6}$; $F_2(x) = 2\sqrt{x^2+5}$

$f_3(x) = -2\sqrt{1-x}$; $F_4(x) = -\sqrt{1-x^2}$

$F_5(x) = 4\sqrt{x^2+x+1}$; $F_6(x) = -\sqrt{x^2-2x+2}$

$F_7(x) = 2\sqrt{x+1}$