SÉRIE D'EXERCICES N° 3 | VERSION ÉLÈVE

1ère Spé Maths

Probabilités conditionnelles

Prof. Taher Bouyguir | www.proftaher.com

Organisation de la série

Partie A – Probabilités conditionnelles, tableaux et arbres (ex. 1 à 4)
Partie B – Formule des probabilités totales (ex. 5 à 8)
Partie C – Indépendance (ex. 9 à 12)

A Probabilités conditionnelles, tableaux et arbres

Exercice 1 : Calcul direct

A et B sont deux événements tels que $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$.

1. Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
2. Calculer $P_A(\overline{B})$.

Exercice 2 : Tableau croisé

Un lycée compte 500 élèves répartis ainsi :

	Demi-pens.	Externe	Total
Filles	180	100	280
Garçons	150	70	220
Total	330	170	500

On choisit un élève au hasard. F : « c'est une fille », D : « il est demi-pensionnaire ».

1. Calculer $P(F)$, $P(D)$ et $P(F \cap D)$.
2. Calculer $P_F(D)$ puis $P_D(F)$ (arrondis au millième).
3. Les événements F et D sont-ils indépendants ?

Exercice 3 : Compléter un arbre

On donne $P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}6$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$.

1. Construire l'arbre pondéré complet.
2. Calculer $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap B)$ puis $P(B)$.
3. En déduire $P_B(A)$.

Exercice 4 : Reconstituer un arbre

On sait que $P(A) = 0{,}4$, $P(A \cap B) = 0{,}1$ et $P(B) = 0{,}46$. Déterminer $P_A(B)$, $P(\overline{A} \cap B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$, puis construire l'arbre pondéré.

B Formule des probabilités totales

Exercice 5 : Deux urnes

Une urne U_1 contient 3 boules rouges et 2 noires ; une urne U_2 contient 1 boule rouge et 4 noires. On lance une pièce équilibrée : si « Pile », on tire une boule dans U_1, sinon dans U_2.

1. Construire un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.
3. On a tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 ?

Exercice 6 : Test de dépistage

Une maladie touche $2\,\%$ d'une population. Un test est positif chez $99\,\%$ des malades et chez $3\,\%$ des personnes saines. On note M : « la personne est malade » et T : « le test est positif ».

1. Construire l'arbre pondéré.
2. Calculer $P(T)$.
3. Le test d'une personne est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? Commenter.

Exercice 7 : Trois machines

Une usine utilise trois machines : M_1 fabrique $50\,\%$ des pièces, M_2 $30\,\%$ et M_3 le reste. Les taux de pièces défectueuses sont $1\,\%$, $2\,\%$ et $3\,\%$.

1. Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.

2 Une pièce est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de M_3 ?

Exercice 8 : QCM

À une question de QCM à 4 réponses (une seule juste), un élève connaît la réponse avec la probabilité $0{,}6$; sinon il répond au hasard. On note C : « il connaît la réponse » et J : « sa réponse est juste ».

1 Calculer $P(J)$.

2 Sa réponse est juste. Quelle est la probabilité qu'il ait connu la réponse ?

C Indépendance

Exercice 9 : Par le calcul

1 $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}18$: A et B sont-ils indépendants ?

2 $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cup B) = 0{,}7$: même question.

Exercice 10 : Lancer d'un dé

On lance un dé équilibré à 6 faces. A : « le résultat est pair », B : « le résultat est inférieur ou égal à 4 », C : « le résultat est un multiple de 3 ». Étudier l'indépendance de A et B, de A et C, puis de B et C.

Exercice 11 : Démonstration

Soit A et B deux événements indépendants de probabilités non nulles.

1 Montrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

2 En déduire que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 12 : Comme au DST

Dans un magasin, $40\,\%$ des clients paient par carte. Parmi eux, $25\,\%$ ont une carte de fidélité ; parmi les autres clients, $10\,\%$ ont une carte de fidélité. On choisit un client au hasard. C : « il paie par carte », F : « il a une carte de fidélité ».

1 Représenter la situation par un arbre pondéré.

2 Calculer la probabilité que le client paie par carte et ait une carte de fidélité.

3 Montrer que $P(F) = 0{,}16$.

4 Un client a une carte de fidélité. Quelle est la probabilité qu'il paie par carte ?

5 Les événements C et F sont-ils indépendants ?