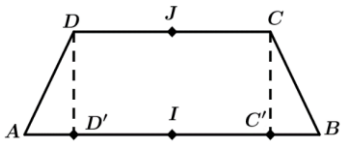
Exercice ①

Soit $ABCD$ un trapèze isocèle tel que: $AB=6$ *et* $CD=5$ et soient I et J les milieux respectifs de $[AB]$ *et* $[CD]$. (voir la figure).



Calculer les produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC'}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{ID}$

Exercice ②

ABC un triangle isocèle en A tel que $AB=3$ et $BC=3\sqrt{3}$.

1) Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

2) En déduire $A\hat{C}B$ et $C\hat{A}B$.

Exercice ③

1) Calculer le produit scalaire $\vec{U}.\vec{V}$ dans les cas suivants :

- $\left\|\vec{U}\right\|=2\sqrt{2},\ \left\|\vec{V}\right\|=\sqrt{2},\ et\ \left(\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}\right)\equiv\frac{4\pi}{3}[2\pi]$.
- $\left\|\vec{U}\right\|=4,\ \left\|\vec{V}\right\|=2,\ et\ \left(\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}\right)\equiv\frac{3\pi}{2}[2\pi]$.
- $\left\|\vec{U}\right\|=1,\ \left\|\vec{V}\right\|=\sqrt{2},\ et\ \left(\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}\right)\equiv\frac{500\pi}{4}[2\pi]$.

2) Déterminer les valeurs possibles de l'angle $\left(\vec{U};\vec{V}\right)$ dans les cas suivants :

- $\left\|\vec{U}\right\|=3,\ \left\|\vec{V}\right\|=4,\ et\ \vec{U}.\vec{V}=6\sqrt{2}$.
- $\left\|\vec{U}\right\|=1,\ \left\|\vec{V}\right\|=2\sqrt{3},\ et\ \vec{U}.\vec{V}=-3$.

Exercice ④

Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs du plan tels que $\left\|\vec{U}\right\|=2,\ \left\|\vec{V}\right\|=3,\ et\ \left(\overrightarrow{U};\overrightarrow{V}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1) Déterminer le réel m dans les cas suivants :

1) $\left(m\vec{U}-\vec{V}\right).\vec{V}=0$ 2) $\left(2\vec{U}+3\vec{V}\right).\left(\vec{U}-m\vec{V}\right)=-2$

3) $\left(2\vec{U}+m\vec{V}\right).\left(3\vec{U}-\vec{V}\right)=5$ 4) $\left(m\vec{U}-\vec{V}\right)^2=9$

2) Déterminer les réels a et b sachant que :

$$\begin{cases}\left(a\vec{U}+b\vec{V}\right).\vec{U}=0\\ \left(a\vec{U}+b\vec{V}\right).\vec{V}=0\end{cases}$$

Exercice ⑤

ABC est un triangle tel que $AB=1,\ AC=\sqrt{2}$ et $\cos(\hat{A})=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

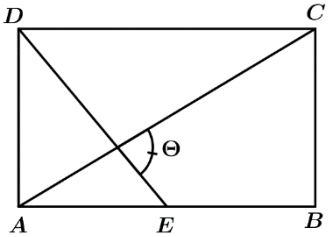
1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) Considérons D un point du plan défini par : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$. Conclure.

Exercice ⑥

$ABCD$ un rectangle tel que : $AD=3$ et $AB=5$ et E le milieu du segment $[AB]$.



1) Calculer les distances AC et DE.

2) a)- Ecrire $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b)- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}$.

3) En déduire la mesure de l'angle θ en degré.

Exercice ⑦

ABC est un triangle $AB=6, AC=5 et BC=7$.

1) En utilisant le théorème d'***Al-Kashi*** montrer que : $\cos(\hat{A})=\frac{1}{5}$.

2) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis déduire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=30$.

3) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Calculer la distance BH .

Exercice ⑧

ABC est un triangle $AB=4, AC=3 et \cos(A)=\frac{5}{6}$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) Calculer la distance BC.

3) Soient I et J les milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$.

Montrer que : $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2\right)$.

4) En déduire que : $(BI)\perp(CJ)$.

Exercice ⑨

ABC est un triangle tel que $AB=3$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=6$ et $\hat{A}=\frac{\pi}{3}$.

Soient I le milieu du segment $[AB]$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB).

1) Montrer que $AH = 2$.

2) Calculer la distance AC.

3) Calculer la distance BC puis déduire la distance CI.

4) Soit J un point du plan tel que : $8\overrightarrow{AJ} + k\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Déterminer la valeur de k pour que $\overrightarrow{BJ} \perp \overrightarrow{AC}$.

Exercice ⑩

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$ et $AD = 4$ et $CD = 6$ et soit O le milieu du segment $[AB]$.

1) Calculer les distances BD et AC.

2) Montrer que pour tout point M du plan que $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 18$.

3) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 24$.

Exercice ⑪

ABC est un triangle $AB = 4, BC = 4\sqrt{7}$ et $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$.

1) Montrer que : $AC = 12$.

2) Soit D un point du plan tel que : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

a)- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

b)- En déduire $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BD}$.

3) Soit E le milieu du segment $[AB]$. Montrer que: $DE = 2\sqrt{13}$.

Exercice ⑫

ABC est un triangle $BC = 2, AC = \sqrt{3}$ et $\hat{C} = \frac{\pi}{6}$.

1) Calculer la distance AB puis déterminer la mesure de l'angle $\hat{A}$.

2) On considère H le projeté orthogonal de A sur (BC). Montrer que : $AH^2 + \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CH} = 0$.

3) **a)-** Calculer les distances CH et BH.

b)- En déduire que : $3\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

c)- Montrer que pour tout point M du plan (P) on a : $3MB^2 + MC^2 = 4HM^2 + 3$.

4) Trouver l'ensemble du points M du plan (P) tels que : $3MB^2 + MC^2 = 6$.

Exercice ⑬

ABC un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 1$ et $\cos(A) = \frac{-1}{3}$

1) Vérifier que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -1$.

2) Calculer la distance BC.

3) Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$

. a/- Calculer AI et BJ.

b/- Calculer $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$.

4) Soit E un point du plan tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$.

a/- Ecrire le vecteur $\overrightarrow{IE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b/- Montrer que les droites (AB) et (IE) sont perpendiculaires .

Exercice ⑭

$ABCD$ est un carré de coté 1 et de centre O et I le milieu du segment $[BC]$.

On construit à l'intérieur du carré $ABCD$ le point E de telle sorte que le triangle BCE soit équilatéral.

1) Montrer que $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OE} = -OI \times OE$.

2) En déduire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OE} = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$.

3) Montrer que : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{BE} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

4) En déduire la valeur de : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice ⑮ : Théorème de Héron

Soit ABC un triangle. On note $AB = c, AC = b, BC = a$ et $p = \frac{a+b+c}{2}$ et S son aire.

1) En utilisant le théorème d'***Al-Kashi,*** exprimer $1 - \cos^2(A)$ en fonction de $a, b,$ et c.

2) Déduire que:

$$4b^2c^2\sin^2(A) = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$$

3) Justifier l'égalité $\sin^2(A) = \frac{4}{b^2c^2}p(p-a)(p-b)(p-c)$

4) En déduire sur $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

***Application*:**

Calculer l'aire d'un triangle équilatéral de côté 6 cm.