Série des exercices 04 : Suites numériques

Exercice n^o 1 .

Étudier le sens de variations des suites (u_n) définies ci-dessous :

1. $u_n = \frac{2^n}{5}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+3}$
3. $u_n = -n^2 + 5n - 2$
4. $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n - 5$

Exercice n^o 2 .

La suit (u_n) définie par : $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

1. Montrez que (u_n) est croissante.
2. Montrez que (u_n) est majorée par 2.
3. Montrez que (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.

Exercice n^o 3 .

Pour chacune des questions suivantes, la suite (u_n) est définie de façon explicite. Dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre en justifiant votre réponse. Si elle est arithmétique ou géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

1) $u_n = 3n + 4$ **2)** $u_n = 8 \times 2^n$

3) $u_n = 2 \times 3^{n-1}$ **4)** $u_n = \sqrt{2n}$

5) $u_n = \frac{5}{2^n}$ **6)** $u_n = n(n+1) - n(n-1)$

7) $u_n = n^2 + 2n + 1$ **8)** $u_n = \frac{\sqrt{2^n}}{3^n}$

9) $u_n = 5^n + 1$

Exercice n^o 4 .

Considérons une suite (u_n) arithmétique de raison r.

1. $u_0 = 3$ et $u_8 = 7$, Calculez r.
2. $u_2 = 5$ et $u_5 = 2$, Calculez r.
3. $u_0 = 5$ et $r = \frac{-1}{2}$, Calculez u_9.
4. $u_5 = 6$ et $r = 2$, Calculez u_{20}.
5. $u_0 = 3$ et $r = 2$, Calculez $u_0 + u_1 + \cdots u_{20}$.
6. $u_5 = -5$ et $r = \frac{1}{2}$, Calculez $u_5 + u_6 + \cdots u_{30}$.
7. $u_0 = 3$ et $u_{50} = 60$, Calculez $u_0 + u_1 + \cdots u_{50}$.
8. $u_1 = 50$ et $u_{50} = 1$, Calculez $u_1 + u_2 + \cdots u_{50}$.

Exercice n^o 5 .

Considérons une suite (u_n) géométrique de raison q.

1. $u_0 = 5$ et $u_2 = 12$, Calculez q.
2. $u_0 = 3$ et $q = 2$, Calculez u_9.
3. $u_2 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$, Calculez u_8.
4. $u_5 = 2$ et $q = \sqrt{2}$, Calculez u_7.
5. $u_0 = 1$ et $q = 2$, Calculez $u_0 + u_1 + \cdots u_{20}$.
6. $u_0 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$, Calculez $u_q + u_1 + \cdots u_{30}$.
7. $u_1 = 60$ et $q = \frac{1}{3}$, Calculez $u_1 + u_2 + \cdots u_{50}$.
8. $u_1 = 50$ et $q = 3$, Calculez $u_1 + u_2 + \cdots u_{50}$.

Exercice n^o 6 .

Ahmed achète deux bidons de 100 litres : un dans lequel il met de l'eau, l'autre dans lequel il met du lait. Chaque jour, il consomme 30% de la quantité de lait et 50% de la quantité de l'eau qu'il avait le jour précédent. Tous les soir avant de se coucher, il ajoute 10 litres de lait dans le bidon de lait et 20 litres d'eau dans le bidon de l'eau. On note e_n la quantité de l'eau et l_n la quantité de lait (en litres) au $n - ime$ jours après les ajouts d'eau et de lait. On a ainsi $e_0 = 100$ et $l_0 = 100$

1. Calculez e_1 et l_1 .
2. Déterminer les relation de récurrence des suites (e_n) et (l_n).
3. On pose : $u_n = e_n - 40$
   (a) Monter que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera son raison et le premier terme.
   (b) En déduire le terme général de (u_n) en fonction de n puis celui de (e_n).
4. On pose : $v_n = l_n - \frac{100}{3}$
   (a) Monter que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera son raison et le premier terme.
   (b) En déduire le terme général de (v_n) en fonction de n puis celui de (l_n).

Exercice n^o 7 .

(u_n) est la suite numérique définie par : $u_n = \frac{n+1}{4n+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{4} < u_n < 1$
2. Montrez que (u_n) est croissante.

Exercice n^o 8 .

Chaque année, 12.5% de la population quitte un village et 1200 personnes s'y installent.
En 2016, le village comptait 40 000 habitants.
On note a_n le nombre d'habitants du village en l'année $2016+n$, donc $a_0 = 40000$

1. Calculez a_1, a_2.
2. Donnez a_{n+1} en fonction de a_n.
3. On pose $b_n = a_n - 9600$. Démontrez que (b_n) est une suite géométrique,précisez sa raison et son premier terme.
4. Donnez l'expression de b_n ,puis celle de a_n en fonction de n.
5. Selon ce modèle, en quelle année la population de cette village sera supérieure à 1000000 ?

Exercice n^o 9 .

Une entreprise de transport possède 40 camions en 2015. L'évolution de l'entreprise est telle que celle-ci doit acheter 8 camions supplémentaires chaque année.
On note u_n le nombre de camions en l'année $2015+n$, donc $u_0 = 40$.

1. Calculer le nombre de camions que possède l'entreprise en 2016, en 2017 et en 2018.
2. Ces nombres forment une suite ?
3. Déterminer la relation de récurrence (u_n) .
4. Donner l'expression du nombre u_n de camions que possède l'entreprise l'année n.
5. Quel est le nombre de camions que possède l'entreprise en 2022 ?

Exercice n^o 10 .

(u_n) est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n-4}{u_n} \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Démontrez que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n > 4$ arithmétique ?
2. Vérifiez que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n-1)(u_n-4)}{u_n}$
3. Déduire que (u_n) est décroissante.
4. Déduire que $u_n \leq 5$
5. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \frac{u_n-4}{u_n-1}$
   Montrez que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$

Exercice n^o 11 .
(u_n) est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Démontrez par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n > 4$
2. Vérifiez que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}(4 - u_n)$.
3. Étudier la monotonie de (u_n) .
4. Déduire que $4 < u_n \leq 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
5. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = u_n - 4$
   (a) Montrez que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.
   (b) Écrivez v_n en fonction de n.
   (c) Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = \frac{4^{n+1}+2}{4^n}$
   (d) Montrez que : $v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = \frac{8}{3}(1 - \frac{1}{4^n})$

Exercice n^o 12 .

(u_n) est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8; \\ u_{n+1} = \frac{5u_n-4}{1+u_n} \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - 2 = -3 + \frac{3(u_n-2)}{1+u_n}$
2. Montrez que par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \neq 2$
3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \frac{u_n}{u_n-2}$
   (a) Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} = \frac{5u_n-4}{3(u_n-2)}$
   (b) Montrez que (v_n) est une suite arithmétique de raison $q = \frac{2}{3}$.
   (c) Écrivez v_n en fonction de n.
   (d) Déduire que que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = \frac{4n+8}{2n+1}$
   (e) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \frac{2}{u_n-2} + 1$
   (f) Calculez la somme : $S = \frac{2}{u_0-2} + \frac{2}{u_1-2} + \cdots + \frac{2}{u_{19}-2}$

Exercice n^o 13 .

(u_n) est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2; \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n+3} \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Montrez que par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n > 1$
2. Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+3}$
3. Montrez que la suite (u_n) est décroissante.
4. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \frac{u_n-1}{u_n}$
   (a) Montrez que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$.
   (b) Écrivez v_n en fonction de n.
   (c) Déduire que que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = \frac{2}{2-(\frac{3}{5})^n}$
   (d) Calculez la somme : $S = v_0 + u_1 + \cdots + u_{29}$