Prof : Bouyguir Taher

Lycée qualifiant Mohamed VI

Exercice 1 :

1) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 6 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}\,.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 3$.

2) On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$v_1 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* : v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$

Exercice 2 :

1) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = -5$.

a- Calculer u_{10} et u_{30}.

b- Calculer la somme : $S = u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_{30}$.

2) Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ une suite arithmétique telles que : $v_5 = -12$ et $v_{11} = -30$

a- Calculer la raison de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$, et son premier terme v_1.

b- Calculer la somme : $S = v_5 + v_6 + \cdots\cdots + v_{11}$.

Exercice 3 :

1) Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_1 = -2$.

Calculer la somme : $S = u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_{10}$.

2) Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ telle que $v_3 = 5$.

Calculer la somme : $S' = v_3 + v_4 + \cdots\cdots + v_{15}$.

Exercice 4 :

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n+5} \end{cases}.$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 0$.

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{5}{u_n}$.

a- Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

b- En déduire v_n et u_n en fonction de n.

Exercice 5 :

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{8u_n+3}{u_n+6} \end{cases}.$$

1) a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 < u_n < 3$.

b- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2) On considère la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1}.$$

a- Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b- Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

Exercice 6 :

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 1 \end{cases}.$$

On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 2$.

1) Calculer u_1 et v_0.

2) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique.

3) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n.

4) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = v_0 + v_1 + \cdots\cdots + v_n$.

Calculer S_n en fonction de n.

Exercice 7 :

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{4u_n-9}{u_n-2} \end{cases}.$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 3$.

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $w_n = \frac{1}{u_n-3}$.

a- Montrer que (w_n) est une suite arithmétique.

b- En déduire w_n et u_n en fonction de n.

3) Calculer en fonction de n la somme :

$$S_n = w_0 + w_1 + \cdots\cdots + w_n$$

Exercice 8 :

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n} \end{cases}.$$

1) a- Calculer u_1.

b- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n > 4$.

2) a- Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(4 - u_n)}{u_n}.$$

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n \leq 5$.

3) On considère la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 1}.$$

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$, puis calculer son premier terme v_0.

b- Exprimer v_n en fonction de n.

c- Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n = \frac{1 - 4^{n+2}}{1 - 4^{n+1}}$

4) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ S_n = v_0 + v_1 + \cdots\cdots + v_{n-1}$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

Exercice 9 :

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{u_n - 3}{u_n + 5} \end{cases}.$$

1) a- Calculer u_1.

b- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n > -1$.

2) a- Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n + 1)(u_n + 3)}{u_n + 5}.$$

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : \ -1 < u_n \leq 0$.

3) On considère la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ v_n = \frac{u_n + 1}{u_n + 3}.$$

a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $= \frac{1}{2}$, puis calculer v_0.

b- Exprimer v_n en fonction de .

c- Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

4) a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{2}(u_n + 1)$

b- Déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n + 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice 10 :

Une personne a acheté une voiture à 80 000 dh le premier janvier 1999.

Soit u_n la valeur de cette voiture le premier janvier $1999 + n$.

On admet que $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 2100$.

On pose : $u_0 = 80\,000$ et $v_n = u_n - 7000$; $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Calculer u_n en fonction de n.

3) Quelle est la valeur de cette voiture au premier janvier 2007 ?

4) A partir de combien d'années la valeur de cette voiture sera inférieure à 30 000 dh?

Exercice 11 :

Une coopérative de production des œufs a vendu sa production 6 fois, cette année.

Son 6ième revenu s'élève à 16105,10dh ; elle remarque que le revenu de chaque vente augmente de 10% par rapport au revenu de la vente précédente.

Soit u_p le revenu de la $p^{ième}$ vente avec $1 \leq p \leq 6$.

1) Exprimer u_{p+1} en fonction de u_p.

2) Déterminer le revenu de la première vente.

3) Déterminer le montant total des revenus de cette coopérative cette année.

Exercice 12 :

A son ouverture, le nombre initial des élèves d'un lycée est de 800. Il évolue ainsi :

Chaque année, 25% quittent le lycée et 140 élèves le joignent.

On note e_n le nombre des élèves au bout de n années.

1) Exprimer e_{n+1} en fonction de e_n.

2) On pose $u_n = e_n - 560$.

a- Montrer que (u_n) est une suite géométrique.

b- Exprimer e_n en fonction de n.

c- Calculer e_{16} et e_{22} . Sur quelle valeur se stabilise le nombre des élèves.

Exercice 13 :

Une entreprise a fabriqué en une année 45000 unités d'un produit.

Pour les années suivantes, la production diminue de 3 000 unités par an.

1) Au bout de combien d'années la production sera-t-elle nulle ?

2) Combien d'unités du produit aura-t-on fabriqué pendant ces années ?

Exercice 14 :

Une entreprise fabrique un type de pièce de rechanges pour un appareil électroménager, l'entreprise a fabriqué 22000 pièces dans une période de 2 ans. En admettant que la production de cette entreprise augmente chaque année de 20%.

1) Quelle était sa production durant la première année ?

2) Combien de pièces fabriquera-t-elle au bout de 5 ans ?

Exercice 15 :

Une population de 100 bactéries prolifère en se multipliant par deux toutes les heures.

1. Quel sera le nombre de bactéries au bout d'une heure, deux heures, cinq heures ?

2. Exprimer en fonction de n, le nombre b_n de bactéries au bout de n heures.

3. Donner une estimation du temps nécessaire pour que le nombre de bactéries soit supérieur à un million.

4. Etudier les variations de la suite (b_n). La suite (b_n) est-elle bornée ?

Exercice 16 :

Dans un jeu entre deux personnes A et B, A propose à B de lui donner 100 dirhams par jour et pendant 10 jours. En contre partie B donne à A, 1 dirham le premier jour, deux dirhams le deuxième jour, quatre dirhams le troisième jour et ainsi de suite jusqu'au dixième, en doublant chaque jour le montant du jour qui précède.

La personne B a-t-elle intérêt à accepter cette proposition ?

Exercice 17 :

Un patron propose à ses employés deux modes d'augmentation de leur salaire mensuel.

Mode A : Augmenter le salaire mensuel de 600 Dhs au 1er janvier de chaque année.

Mode B : Augmenter de 5% le salaire mensuel le 1er janvier de chaque année.

En 2020, un employé gagne 4000 Dhs par mois.

I- On suppose que cet employé choisit le mode A.

1) Calculer son salaire mensuel en 2021, puis en 2022.

2) On note : $u_0 = 4000$ et u_n le salaire mensuel n années après 2020.

a- Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b- Déterminer le terme général de (u_n).

II- On suppose que cet employé choisit le mode B.

1) Calculer son salaire mensuel en 2021, puis en 2022.

2) On note : $v_0 = 4000$ et v_n le salaire mensuel n années après 2020.

a- Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b- Déterminer le terme général de (v_n).

III- Quel mode devrait choisir cet employé pour qu'à sa retraite, en2011, son salaire soit le meilleur possible?

Exercice 18 :

Le montant annuel de la location d'un appartement au premier janvier 2020 est égal à 24000 Dhs.

Un propriétaire propose deux types de contrats.

1) Dans le premier contrat, le loyer annuel augmente chaque année de 1200 Dhs.

On désigne par P_n le montant annuel du loyer pour l'année $(2020 + n)$.

a- Déterminer P_0, P_1 et P_2.

b- Montrer que (P_n) est une suite arithmétique. Déterminer sa raison.

c- Exprimer P_n en fonction de n.

d- Quel sera le montant annuel du loyer en 2035?

e- En quelle année, pour la première fois, le loyer dépassera-t-il le double du loyer initial ?

f- Quelle sera la somme perçue par le propriétaire au terme des vingt premières années ?

2) Dans le deuxième contrat, le loyer annuel augmente chaque année de 4%.

On désigne par Q_n le montant annuel du loyer pour l'année $(2020 + n)$.

a- Déterminer Q_0, Q_1 et Q_2.

b- Montrer que (Q_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison.

c- Exprimer Q_n, en fonction de n.

d- Quel sera le montant annuel du loyer en 2035 ?

e- En quelle année, pour la première fois, le loyer dépassera-t-il le double du loyer initial ?

f- Quelle sera la somme perçue par le propriétaire au terme des vingt premières années?

Exercice 19 :

Un épargnant a le choix entre deux formules pour placer un capital de 20 mille Dhs à partir du premier janvier 2020 :

- Avec un intérêt simple de 2000 Dhs par an.
- Avec un intérêt composé de 7% par an.

1) Ouvrir un classeur du tableur Excel.

2) a- Ecrire 2020 dans la cellule A1.

b- Entrer dans la cellule A2 la fonction =A1+1 puis taper « Enter ».

c- Sélectionner A2 et faire apparaître la croix noire en bas et à droite de la cellule, puis tirer le calcul vers

A20.

3) a- Ecrire 20000 dans la cellule B1.

b- Entrer dans la cellule B2 la fonction =B1+2000 puis taper « Enter ».

c- Sélectionner B2 et faire apparaître la croix noire en bas et à droite de la cellule, puis tirer le calcul vers B20.

4) a- Ecrire 20000 dans la cellule C1.

b- Entrer dans la cellule C2 la fonction =C1*1,07 puis taper « Enter ».

c- Sélectionner C2 et faire apparaître la croix noire en bas et à droite de la cellule, puis tirer le calcul vers C20.

5) a- Quelle formule devrait choisir cet épargnant s'il décide d'épargner son capital pendant 10 ans ?

b- Quelle formule devrait choisir cet épargnant s'il décide d'épargner son capital pendant 15 ans ?

Exercice 20 :

I- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 6 telle que $u_1 = 0$.

Déterminer le terme général de cette suite.

II- Un jardinier décide de verser un seau d'eau au pied de chacun des arbres qui bordent son champ.

Il y a 95 arbres, en ligne droite, espacés de trois mètres et la prise d'eau est au pied du premier.

Le jardinier ne porte qu'un seul seau à chaque fois.

On suppose qu'il arrose les arbres dans l'ordre d'alignement de plus proche au plus éloigné, on pose d_n la distance aller-retour pour arroser le nième arbre et revenir au point d'eau.

1) Calculer les distances d_1, d_2, d_3 et d_4 qui correspondent au 4 premiers aller retours.

2) a- Soit $n \in \{1; 2; 3; \dots; 94\}$, exprimer d_{n+1} en fonction de d_n.

b- Déduire que $(d_n)_{1\leq n\leq 95}$ sont des termes consécutifs de la suite (u_n) ?

3) Calculer le chemin que le jardinier aura à parcourir pour arroser tous ces arbres.

Exercice 21 :

Un échiquier comporte 64 cases.

Sur la première case, on pose $b_1 = 1$ grain de blé.

Sur la deuxième case, on pose $b_2 = 2$ grains de blé.

Sur la troisième case, on pose $b_3 = 4$ grains de blé.

Sur la quatrième case, on pose $b_4 = 8$ grains de blé.

Et ainsi de suite jusqu'à la 64ème case.

On désigne par b_n le nombre de grains de blé se trouvant dans la nième case.

1) Déterminer b_5; b_6 et b_7.

2) Montrer que les nombres $(b_n)_{1\leq n\leq 64}$ sont les termes consécutifs d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

3) On désigne par S, le nombre total de grains de blé qu'il y a sur l'ensemble de l'échiquier.

a- Vérifier que $S = 2^{64} - 1$.

b- Vérifier que $2^{10} > 10^3$ puis déduire que $2^{64} > 16 \times 10^{18}$.

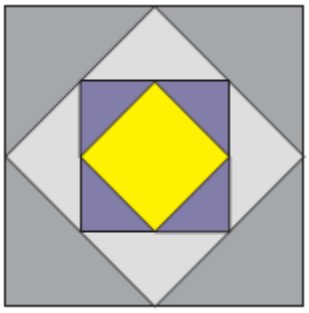
c- En moyenne 104 grains de blé pèsent 1kg. Donner un ordre de grandeur de la quantité de blé qui se trouve sur l'échiquier.

d- La production mondiale actuelle est d'environ 800 millions de tonnes. Déterminer la proportion de la quantité de blé de l'échiquier par rapport à la production mondiale.

Exercice 22 :

On construit un carré de côté 1, puis on en construit un second en reliant les milieux des côtés du premier.

En répétant ce procédé, on trace à chaque fois un nouveau carré.



a- Déterminer l'aire du deuxième carré, du troisième carré, du quatrième carré et du cinquième carré.

b- Quelle est l'aire du 12ème carré ?

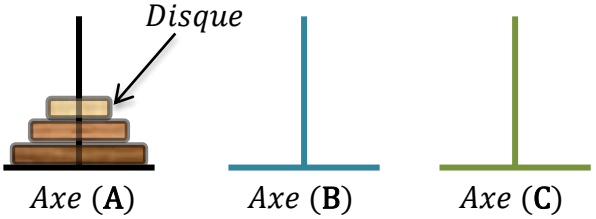
c- Parmi ces carrés, y a-t-il un dont l'aire est le dixième de l'aire du carré initial ?

Exercice 23 :

La tour de Hanoi : Il s'agit de déplacer tous les disques de l'axe (**A**) vers l'axe (**C**) sachant que :

- à chaque fois, on ne déplace qu'un seul disque,
- on ne peut pas mettre un disque sur un disque plus petit.

S'il y a n disques, on notera x_n le nombre minimum de coups nécessaires.



1) Vérifier que : $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ et $x_3 = 7$.

2) Prouver que : $x_{n+1} = 2x_n + 1$.

3) En déduire que : $x_n = 2^n - 1$.

4) Donner une estimation du temps nécessaire pour placer 20 disques sachant que chaque coup nécessite 1 seconde.

Exercice 24 :

Pour creuser un puits, un agriculteur fait un appel d'offre à deux sociétés de forage

La première propose le contrat suivant :

- 15 dirhams pour le premier mètre,
- 20 dirhams pour le deuxième mètre et chaque mètre supplémentaire coûte 5 dirhams de plus que le précédent

La deuxième propose :

- 10 dirhams pour le premier mètre,
- chaque mètre supplémentaire coûte 10% de plus que le précédent.

1) Exprimer, en fonction de n, les coûts C_n et C'_n du forage d'un puits profond de n mètres par chacune des sociétés

2) a- Quel est le contrat le plus avantageux (pour l'agriculteur) si la profondeur de puits atteint 20 mètres ?

b- Même question si la profondeur de puits atteint 50 mètres ?