Exercice 00

1) On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}); U_n = (n+2)(3-n)$$

1) Calculer $U_0; U_1; U_2; U_3; U_4$

2) Exprimer en fonction de n les termes suivants :

$U_{n+1}; U_{n^2}; U_{n+2}; U_{3n}$

3) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et n

Exercice 01

2) On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$U_0 = 6$ et $(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}$

a) calculer U_1

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n \geq 3$

3) on considère la suite numérique $(V_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$V_1 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*); V_{n+1} = 1 + \frac{1}{V_n}$

a) calculer V_2 et V_3

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{3}{2} \leq V_n \leq 2$

Exercice 02

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$U_0 = \frac{3}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = \frac{U^2{}_n + U_n}{U^2{}_n + 1}$

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > 1$

2) Etudier la monotonie de la suite (U_n)

3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

Exercice 03

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$U_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{U_n}$

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 2 \leq U_n \leq 4$

2) Etudier la monotonie de la suite (U_n)

3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$

4) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq 4 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Exercice 04

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$U_0 = 5$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} = \frac{4U_n - 9}{U_n - 2}$

2) on pose $(\forall n \in \mathbb{N}); W_n = \frac{1}{U_n - 3}$

a) Montrer que (W_n) est une suite arithmétique en précisant sa raison

b) En déduire W_n et U_n en fonction de n .

c) Calculer en fonction de n la somme suivante :

$$S_n = W_0 + W_1 + \cdots\cdots + W_n$$

b) Montrer que la suite (U_n)est décroissante.

Exercice 05

1) soit (U_n) une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $U_0 = -5$

a- Calculer U_{10} et U_{30}.

b- Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_{30}$.

2) soit $(V_n)_{n\geq 1}$ une suite arithmétique telles que :

$$V_5 = -12 \text{ et } V_{11} = -30$$

a) Calculer la raison de la suite $(V_n)_{n\geq 1}$, et son premier terme.

b) Calculer la somme $S = \sum_{k=5}^{11} V_k$

Exercice 06

Soit (U_n)une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} = \frac{3}{2}U_n + 1 \end{cases}$$

On pose $(\forall n \in \mathbb{N}); V_n = U_n + 2$

1) Calculer U_1 et V_0 .

2) Démontrer que (V_n)est une suite géométrique.

3) Exprimer V_n en fonction de n et en déduire U_n en fonction de n

4) On pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*); S = V_0 + V_1 + \ldots\ldots + V_n$

Calculer S_n en fonction de n .

Exercice 07

1) Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $U_1 = -2$

Calculer la somme $S = U_1 + U_2 + \cdots\cdots + U_{10}$

2) Soit (V_n)une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ telle que $V_3 = 5$

1) Montrer que $U_n > 3$

Exercice 08

Soit (U_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N});\ U_{n+1} = \frac{U_n - 3}{U_n + 5} \end{cases}$$

1) Calculer U_1

2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N});\ U_n > -1$.

3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{(U_n+1)(U_n+3)}{U_n+5}$$

4) on considère la suite (V_n) définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N});\ V_n = \frac{U_n+1}{U_n+3}$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$,puis calculer V_0 .

b) Exprimer V_n en fonction de n .

c) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ U_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

4)

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N});\ U_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{2}(U_n + 1)$

b) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N});\ U_n + 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Calculer la somme $S' = V_3 + V_4 + \cdots\cdots + V_{15}$

Exercice 09

Soit (U_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ (\forall n \in \mathbb{N});\ U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{U_n} \end{cases}$$

1) a) Calculer U_1.

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N});\ U_n > 4$

2) a) Vérifier que pour tout n de$\mathbb{N}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(4 - U_n)}{U_n}$$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

3) on considère la suite (V_n) définie par

$$(\forall n \in \mathbb{N});\ V_n = \frac{U_n - 4}{U_n - 1}$$

a) Montrer que (V_n)est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$; puis calculer son premier terme V_0 .

b) Exprimer V_n en fonction de n .

c) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ U_n = \frac{1-4^{n+2}}{1-4^{n+1}}$

4) on pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ S_n = V_0 + V_1 + \cdots\cdots + V_{n-1}$.

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$