Lycée : Med VI - Taliouine	**Les Suites Numériques**	1 Bac Sciences Expérimentales
Année scolaire : 2022/2023	Série N°5	Prof : Taher Bouyguir

Exercice 1

1 Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_n = 2^{n-1}(1-3n)$$

Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

2 Soit (v_n) la suite numérique définie par :

. $$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$.

(a) Calculer v_1, v_2 et v_3.

(b) Calculer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de n

3 Soit (w_n) la suite numérique définie par :

$$w_{n+1} = n^4 - 5n^3 + n - 2020$$

. Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n et n .

4 Soit (s_n) la suite numérique définie par :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

(a) Calculer s_1, s_2 et s_3 .

(b) Vérifier que $(\forall k \in \mathbb{N})$:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

(c) Déduire l'expression de s_n en fonction de n .

Exercice 2

Soit(u_n),(v_n),(w_n) et (x_n) les suite numériques définies par :

$$u_n = \frac{6n - 10\sqrt{n} + 11}{n + \sqrt{n} + 1} \; ; \; v_n = -n^2 + 3n + 7$$

$$w_n = \frac{2 + cos(n)}{3 - sin(\sqrt{n})} \; ; \; x_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$$

1 Montrer que (u_n) est minorée par 2 .

2 Montrer que (v_n) est majorée .

3 Montrer que (w_n) est bornée .

4 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $|x_n| \leqslant \frac{1}{2}$

Soit s_n la suite définie par :

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_{n+1} = \sqrt{2 + s_n}, (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 \leq s_n \leq 2$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \; ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

1 Étudier la monotonie de (u_n) .

2 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$:

(a) $u_n = n - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right)$.

(b) $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + n = (n+1)u_n$

Exercice 4

Étudier la monotonie des suites suivantes :

a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$ b) $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Soit s_n la suite définie par :

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_{n+1} = \sqrt{2 + s_n}, (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Montrer que par récurrence que s_n est croissante.

Exercice 5

Soit u_n la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1 + u_n^2}, (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1 Calculer u_1 et u_2 .

2 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{N})$: $0 < u_n < 1$

3 Montrer que (u_n) est croissante .

4 Déduire que : $(\forall x \in \mathbb{N})$ $u_n \geq \frac{1}{2}$

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} - \frac{2}{u_n^2}, (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1 Démontrer que (u_n) est minorée par 2 .

2 Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$

3 Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n, (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = u_{n+1} - u_n$

1. Montrer que (v_n) est constante .
2. Déduire que (u_n) est une suite arithmétique puis déterminer u_n en fonction de n .

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n}{4u_n + 7}, (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$
2. Étudier la monotonie de (u_n) .
3. Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \leq 1$
4. $(\forall n \in \mathbb{N})$ on pose : $v_n = \dfrac{7}{u_n}$
   (a) Montrer que (v_n) une suite arithmétique .
   (b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n .
   (c) Calculer : $v_1 + v_2 + \ldots + v_{20}$

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 1, (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

et $(\forall n \in \mathbb{N})$: $v_n = 4u_n - 6n + 15$

1. Montrer que (v_n) une suite géométrique .
2. Exprimer v_n en fonction de n
3. Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = t_n + w_n$

$$\text{avec : } t_n = \frac{19}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ et } w_n = \frac{3}{2}n - \frac{15}{4}$$

4. Expliquer pourquoi t_n un suite géomagnétique et (w_n) une suite arithmétique .
5. $(\forall n \in \mathbb{N})$ on pose :

$$T_n = t_0 + t_1 + \ldots + t_n \ \ et \ \ W_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$$

$$et \ \ U_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

   (a) Déterminer T_n et W_n en fonction de n .
   (b) Déduire l'expression de U_n en fonction de n

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{(1 + \sqrt{u_n})^2}, (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

On pose : $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$, $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Calculer v_0 et v_1.
2. Prouver que la suite (v_n) est arithmétique.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
4. Calculer en fonction de n la somme :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Exercice 11

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (1 + u_n)u_n, (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n \geq 1$
2. Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} \geq 1 + u_n$ et en déduire la monotonie de la suite (u_n).
3. (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > n$
   (b) En déduire que : $u_1 + \ldots + u_n > \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice 12

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 10}, (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$
2. Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} < \dfrac{1}{5}u_n$.
3. En déduire la monotonie de (u_n).
4. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$u_1 + \ldots + u_n < \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

Exercice 13

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 3}, (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{2(u_n - 1)}{3 + u_n}$
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n > 1$
3. Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(1 - u_n^2)}{2u_n + 3}$
4. En déduire la monotonie de (u_n).
5. On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$, $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$
   (a) Calculer v_0
   (b) Écrire v_{n+1} en fonction de u_n
   (c) En déduire la nature de la suite (v_n)
   (d) Écrire v_n en fonction de n.
6. Écrire u_n en fonction de v_n
7. En déduire u_n en fonction de n

Exercice 14

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{5}u_n + 2, (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} - 5 = \dfrac{3}{5}(u_n - 5)$
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n > 5$
3. Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{u_n}$
4. En déduire la monotonie de (u_n).
5. On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$, $v_n = 10 - 2u_n$
   (a) Calculer v_0
   (b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique en déterminant sa raison.
   (c) Écrire v_n en fonction de n.
6. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n = 5 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$
7. Calculer en fonction de n : $u_1 + \ldots + u_n$

Exercice 15

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \, et \, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{2}{5}u_{n+1} - \dfrac{1}{25}u_n, (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

On pose : $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{5}u_n$ et $w_n = 5^n u_n$

1. Calculer v_1 et w_2.
2. Montrer que v_n est suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$, puis écrire v_n en fonction de n.
3. Montrer que w_n est suite arithmétique de raison 5, puis écrire w_n en fonction de n.
4. Calculer la somme : $5u_1 + 5^2u_2 + \ldots + 5^n u_n$
5. (a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $0 < u_{n+1} < \dfrac{2}{5}u_n$
   (b) En déduire la monotonie de (u_n).
6. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $0 < u_n \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$
7. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$:
$$u_1 + \ldots + u_n \leq \frac{5}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

Exercice 16

La production d'une appareil de textile peut être représentée par une suite arithmétique (u_n) telle que, pour tout entier naturel non nul (u_n) désigne le nombre d'étoffes produites pendant l'année n.
La première année, la production est de 500 étoffes ; on a donc $u_1 = 500$. A la $5^{\text{ième}}$ année, la production est de 6800 étoffes; on a donc $u_5 = 3300$.

1. Montrer que la raison de la suite (u_n), est 700.
2. Exprimer (u_n) en fonction de n.
3. Au bout de combien d'années la production annuelle aura-t-elle dépassé le double, puis le triple de la production annuelle initiale?
4. Combien d'étoffes l'appareil aura-t-elle produit pendant 10 ans ? sous réserve que cet appareil ne tombera pas en panne.

Exercice 17

Une coopérative de production des œufs a commercialisé en 2019 six fois son produit et sa sixième commercialisation a atteint un chiffre de $16105,10DH$.
Il s'est avéré pour cette coopérative qu'elle a réalisé une croissance de 10% du revenu par rapport au précédent. (durant les 6 opérations) Soit R_n, la valeur du revenu de $n^{\text{ième}}$ commercialisation de cette coopérative tel que $1 \leq n \leq 6$

1. Écrire R_{n+1} en fonction de R_n.
2. Déterminer la valeur du premier revenu.
3. Calculer le revenu total de cette année **(2019)**.

Exercice 18

Le prix d'une matière première augmente annuellement par un taux de **5%** à partir du premier janvier **2019**.
On note p_n le prix d'un tonne de cette matière pendant l'année $2018 + n$. On suppose que $p_0 = 2000DH$.

1. Que représente p_0 ? calculer p_1 et p_2.
2. Montrer que : $p_{n+1} = 1.05p_n$, tout $n \in \mathbb{N}$
3. En déduire la nature de la suite (p_n)
4. Dans quelle année le prix de cette matière se multiplie-t-il par 2 (On donne $(1.05)^{14} \simeq 2$)

Exercice 19

La production d'une entreprise peut être modélisée par une suite arithmétique (u_n) telle que, pour tout entier naturel non nul n, (u_n) Désigne le nombre d'appareils produits l'année n.
La première année, la production est de **7500** on a donc $u_1 = 7500$.
La $6^{\text{ième}}$ année, la production est de **12000** appareils ; on a donc $u_2 = 12000$.

1. Montrer que la raison de la suite (u_n) est **900**.
2. Exprime (u_n) en fonction de n.
3. Au bout de combien d'années la production annuelle aura-t-elle dépassé le triple de la production initiale?
4. Combien d'appareils l'entreprise aura-t-elle ?

On s'intéresse au cours d'une expérience à la croissance d'une population de bactéries dont le nombre augmente de **50%** toutes les heures. À l'origine, la population notée p_0 est de **1200** bactéries.
On note p_n le nombre de bactéries après n heures.

1. Calculer p_1 et p_2.
2. Démontrer que la suite (p_n) est géométrique.
3. Calculer le nombre de bactéries au bout d'une journée.

Exercice 20

Un globe-trotter a parié de parcourir $5000km$ à pied. Il peut, frais et dispos, parcourir $50km$ en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de **1%** tous les jours.
On notera d_n la distance parcourue durant le nième jour.

1. Calculer les distances d_1, d_2 et d_3 parcourues durant les trois premiers jours.
2. Expliquer pourquoi $d_{n+1} = 0,99d_n$.
3. En déduire la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n fonction de n $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$
4. Calculer, en fonction de n, le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours.
5. Déterminer le nombre de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir $4999km$

Exercice 21

Au premier janvier **2014**, une commune rurale contient **100** habitants. On sait de plus que le taux annuel de croissance de la population est de **1,2%** et que **0,3%** émigre chaque année vers les villes voisines. Soit p_n l'effectif de la population de cette commune en l'année $2014 + n$.

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n
3. Calculer l'effectif de la population de cette commune en 2030.