Exercice 1

Calculer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1) $u_n = 3n^5 - 7n^2 - 2$ 2) $u_n = -n^4 + 3n^2 - 5$

3) $u_n = \dfrac{n - 2n^2 + 1}{1 + n^2}$ 4) $u_n = \dfrac{n^2 - n + 7}{2n^3 + 7n^2 - 6}$

5) $u_n = \dfrac{\sqrt{n} - 2}{4\sqrt{n} + 2}$ 6) $u_n = \dfrac{n - 7}{\sqrt{n}}$

7) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ 8) $u_n = \sqrt{2n} - \sqrt{n+1}$

9) $u_n = 2^n + 7^{-n}$ 10) $u_n = 2^n - 7^n$

11) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{5^n + 3}$ 12) $u_n = (0{,}2)^n \dfrac{2n - 7}{n + 4}$

Exercice 2

(u_n) est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n = 4^n - 2^n.$$

① Montrer que : $4^n \geq 2 \times 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

② En déduire que : $u_n \geq 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

③ Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 3

(u_n) est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ u_n = \frac{(-1)^n - 4n}{n}.$$

① Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ -\frac{1}{n} \leq u_n + 4 \leq \frac{1}{n}$.

② Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 4

La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = u_n^2 + 1.$$

① Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n > 0$.

② Montrer que (u_n) est strictement croissante.

③ Montrer que : $\forall n \geq 4 : \ u_n \geq 2^n$.

④ Que pouvez-vous en déduire quant à la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice 5

(u_n) est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n = 3\sqrt{n} + \frac{5n+1}{2^{n+3}}.$$

① Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n \geq 3\sqrt{n}$.

② En déduire que la suite (u_n) est divergente.

Exercice 6

(u_n) est la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3.$$

① Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq -6$$

② Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire qu'elle est convergente.

③ Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n + 6$.

a- Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b- Déterminer le terme général de (v_n) .

c- En déduire u_n en fonction de n et calculer $\lim u_n$.

Exercice 7

(u_n) est la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{9}.$$

① Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > \frac{2}{3}$

② a- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b- En déduire que (u_n) est convergente.

③ Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

a- Déterminer le premier terme la suite (v_n).

b- Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

c- Déterminer le terme général de (v_n) .

d- En déduire u_n en fonction de n.

e- Calculer $\lim u_n$.

④ Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}.$$

a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{2}{3}n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

b- Calculer $\lim S_n$.

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \ u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}.$$

① Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$

② a- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b- En déduire que (u_n) est convergente.

③ On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

a- Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$.

b- Déterminer v_n en fonction de n.

④ a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{15+4n}{3+4n}$.

b- En déduire $\lim u_n$.

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{4u_n + 8}.$$

① Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n > -\frac{1}{2}.$$

② a- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b- En déduire que (u_n) est convergente.

③ On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{2}{1+2u_n}$.

a- Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{2}{3}$.

b- Déterminer le terme général de (v_n).

④ a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{2-v_n}{2v_n}$, et en déduire u_n en fonction de n.

b- Calculer $\lim u_n$.

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - u_n}.$$

① Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 2.$$

② a- Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(u_n - 2)}{1 + (2 - u_n)}.$$

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c- En déduire que (u_n) est convergente.

③ On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$.

a- Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 3$.

b- Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

c- En déduire $\lim u_n$.

Exercice 11

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 100 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 10}.$$

① Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 0$

② Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

③ a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} < \frac{1}{10} u_n$.

b- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n < 100 \left(\frac{1}{10}\right)^n$.

c- Calculer $\lim u_n$.

Exercice 12

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2}.$$

① Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 3 \leq u_n \leq 4.$$

② Etudier la monotonie de la suite (u_n) et déduire qu'elle est convergente.

③ a- Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n).$$

b- En déduire que $\lim u_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

c- En déduire $\lim u_n$.

④ Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$.

a- Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

b- Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

c- Déterminer de nouveau $\lim u_n$.

⑤ Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

a- Calculer S_n en fonction de n.

b- Déterminer $\lim S_n$.

Exercice 13

Partie 1 : On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{x^2-3x+6}{x-1}.$$

① Déterminer $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f.

② Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.

③ Pour tout x de $\mathcal{D}$, calculer $f'(x)$.

④ Dresser le tableau de variations de f.

Partie 2 : Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0=4 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=f(u_n).$$

① Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\geq 3$

② Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

② En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim u_n$.

Exercice 14

Partie 1 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=5-\frac{4}{x}.$$

① Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations.

② Déterminer les points d'intersections de la courbe représentative de f et la droite (Δ) d'équation $y=x$.

③ Montrer que : $\forall x\in\,]1;4[: f(x)>x$.

Partie 2 : Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0=2 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=f(u_n).$$

① Montrer par récurrence que :

$$\forall n\in\mathbb{N}: 1<u_n<4.$$

② Montrer que la suite (u_n) est croissante

③ En déduire que la suite (u_n) est convergente.

④ Calculer $\lim u_n$.

Exercice 15

Partie 1 : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=\sqrt{2x+8}.$$

① Etudier les variations de f.

② Etudier la position relative de la courbe représentative de f et la droite $(\Delta): y=x$.

Partie 2 : Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0=0 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=f(u_n).$$

① Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}: 0\leq u_n\leq 4$.

② Etudier la monotonie de la suite (u_n).

③ Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 16

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

① a- Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+: f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

b- En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

② Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+: f(x)\leq x$

③ Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=f(u_n).$$

a- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}: 0<u_n<1$

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante

c- En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim u_n$.

Exercice 17

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0=1 \quad \text{et} \quad u_1=3 \\ \forall n\in\mathbb{N}: u_{n+2}=8u_{n+1}-7u_n \end{cases}.$$

$$\text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}: v_n=u_{n+1}-u_n.$$

① Calculer u_2 ; u_3 et v_2.

② Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

③ Déterminer le terme général de (v_n).

④ Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-1}.$$

a- Calculer la somme S_n en fonction de n..

b- Déduire le terme général de (u_n) en fonction de n.