Concours ENSA 2022 - Correction suggérée par le professeur Taher Bouyguir

Solution

1. **Problème :** Sachant que $11 \times 11 = 121$, déterminer la valeur de $111111111 \times 111111111$.

   Observons d'abord le motif des résultats pour des nombres composés uniquement de 1 :

   $$1 \times 1 = 1 \Leftrightarrow 11 \times 11 = 121 \Leftrightarrow 111 \times 111 = 12321$$

   $$1111 \times 1111 = 1234321$$

   $$\vdots$$

   $$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$$

   Le motif montre une séquence croissante puis décroissante des chiffres de 1 à 9, puis de 8 à 1.

   Réponse : $\boxed{C.\quad 12345678987654321}$

2. **Problème :** Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 546×840.

   Décomposons d'abord les nombres en facteurs premiers :

   $$546 = 2 \times 3 \times 7 \times 13$$

   $$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$

   Calculons le produit 546×840 :

   $$546 \times 840 = (2 \times 3 \times 7 \times 13) \times (2^3 \times 3 \times 5 \times 7) = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 13$$

   Le nombre de diviseurs positifs est donné par le produit des exposants incrémentés :

   $$(4+1)(2+1)(1+1)(2+1)(1+1) = 5 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 180$$

   Réponse : $\boxed{A.\quad 180}$

3. **Problème :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La négation de la proposition « f est la fonction nulle » est :

   Analyse : La proposition originale « f est la fonction nulle » s'écrit formellement :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$

   Sa négation est :

   $$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$$

   Réponse : $\boxed{D.\quad \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0}$

4. **Problème :** Résoudre l'équation :

   $$\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$$

   (a) Combinaison des logarithmes :

   $$\ln\left(\frac{x^2-1}{2x-1} \times 2\right) = 0$$

   $$\Rightarrow \frac{2(x^2-1)}{2x-1} = e^0 = 1$$

   (b) Simplification :

   $$2x^2 - 2 = 2x - 1$$

   $$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

   (c) Résolution de l'équation :

   $$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

   (d) Vérification des conditions d'existence :

   — $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

   — $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

   Seule la solution $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ satisfait toutes les conditions.

   Réponse : $\boxed{B.\quad \frac{1+\sqrt{3}}{2}}$

5. **Problème :** Trouver pour quelle valeur de k le terme $u_k = C_{22}^k 20^{22-k} 21^k$ est maximal dans le développement de $(20+21)^{22}$.

   Le terme général du binôme est :

   $$u_k = C_{22}^k \cdot 20^{22-k} \cdot 21^k$$

   Pour trouver le terme maximal, on cherche k tel que :

   $$\frac{u_{k+1}}{u_k} \approx 1$$

   $$\frac{C_{22}^{k+1} \cdot 20^{21-k} \cdot 21^{k+1}}{C_{22}^k \cdot 20^{22-k} \cdot 21^k} = \frac{22-k}{k+1} \cdot \frac{21}{20} \approx 1$$

   $$\frac{(22-k) \cdot 21}{(k+1) \cdot 20} \approx 1$$

   $$462 - 21k \approx 20k + 20$$

   $$442 \approx 41k$$

$$k \approx \frac{442}{41} \approx 10.78$$

Le maximum est atteint pour $k = 10$ ou $k = 11$. En calculant les rapports :

$$\frac{u_{11}}{u_{10}} = \frac{12}{11} \cdot \frac{21}{20} = \frac{252}{220} > 1$$

$$\frac{u_{12}}{u_{11}} = \frac{11}{12} \cdot \frac{21}{20} = \frac{231}{240} < 1$$

Donc le maximum est atteint pour $k = 11$.

Réponse : $\boxed{D. \quad 11}$

6. **Problème :** Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2}$.

$$\sqrt[n]{n^2} = n^{2/n} = e^{\frac{2\ln n}{n}}$$

Comme $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{2\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

Réponse : $\boxed{A. \quad 1}$

7. **Problème :** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n - \sqrt{(n+5)(n+7)}$.

Solution : Multiplions et divisons par le conjugué :

$$n - \sqrt{n^2+12n+35} = \frac{(n^2) - (n^2+12n+35)}{n + \sqrt{n^2+12n+35}}$$

$$= \frac{-12n - 35}{n + n\sqrt{1 + \frac{12}{n} + \frac{35}{n^2}}}$$

En divisant numérateur et dénominateur par n :

$$= \frac{-12 - \frac{35}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{12}{n} + \frac{35}{n^2}}}$$

$$et \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{-12 - \frac{35}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{12}{n} + \frac{35}{n^2}}} = \frac{-12}{2} = -6$$

Réponse : $\boxed{B. \quad -6}$

8. **Énoncé :** Déterminer a et b deux réels ; telle que la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est continue en 0 . **Conditions de continuité en 0**

Pour que f soit continue en $x = 0$, il faut que :

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = f(0)$$

Calcul de la limite à droite ($x \to 0^+$)

On a :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Méthode par la règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{-x}{(1+x)2x}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}$$

Calcul de la limite à gauche ($x \to 0^-$) et valeur en 0

Pour $x \leq 0$:

$$f(x) = ax + b \quad Donc : \quad \lim_{x\to0^-} f(x) = b \quad \text{et} \quad f(0) = b$$

Équation de continuité

La condition de continuité donne :

$$-\frac{1}{2} = b$$

La valeur de a n'affecte pas la continuité en 0 car le terme ax devient négligeable lorsque $x \to 0$. Ainsi, a peut être quelconque.

Réponse : $\boxed{D. \quad b = -\frac{1}{2} \text{ et } a \in \mathbb{R}}$

9. **Problème :** Calculer la dérivée de la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt{(x+3)^3}}$$

Réécriture de la fonction : Exprimons toutes les racines sous forme d'exposants fractionnaires :

$$f(x) = (x-1)^{1/2} \cdot (x+2)^{-2/3} \cdot (x+3)^{-3/2}$$

Calcul de la dérivée logarithmique : Prenons le logarithme naturel :

$$\ln f(x) = \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{2}{3}\ln(x+2) - \frac{3}{2}\ln(x+3)$$

Dérivons les deux côtés :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)}$$

Calcul de la dérivée :

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)}\right]$$

Factorisons le dénominateur commun :

$$= \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}} \times$$

$$\frac{3(x+2)(x+3)-4(x-1)(x+3)-9(x-1)(x+2)}{6(x-1)(x+2)(x+3)}$$

Simplifions le numérateur :

$$3(x^2+5x+6)-4(x^2+2x-3)-9(x^2+x-2)$$

$$=3x^2+15x+18-4x^2-8x+12-9x^2-9x+18$$

$$=-10x^2-2x+48$$

Simplification finale :

$$f'(x)=\frac{-10x^2-2x+48}{6}\cdot\frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}\times$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

En réarrangeant les termes et en simplifiant :

$$f'(x)=\frac{5x^2+x-24}{3\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+2)^5}\cdot\sqrt{(x+3)^5}}$$

Réponse : $\boxed{D.\quad \frac{5x^2+x-24}{3\sqrt{x-1}\cdot\sqrt[3]{(x+2)^5}\cdot\sqrt{(x+3)^5}}}$

10. **Problème :** Soit $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ définie par $f(x)=xe^x$. Trouver l'équation de la tangente à la courbe f^{-1} au point d'abscisse e.

Solution :

1. Trouver le point de tangence : Nous cherchons la tangente à f^{-1} au point où $x=e$. Cela correspond à :

$$y=f^{-1}(e)$$

Pour trouver $f^{-1}(e)$, résolvons :

$$f(a)=ae^a=e$$

On remarque que $a=1$ est solution :

$$1\cdot e^1=e$$

Donc $f^{-1}(e)=1$. Le **point de tangence** est $(e,1)$.

2. Calcul de la dérivée de f^{-1} : La pente de la tangente est donnée par :

$$(f^{-1})'(e)=\frac{1}{f'(f^{-1}(e))}=\frac{1}{f'(1)}$$

Calculons $f'(x)$:

$$f'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$$

Donc :

$$f'(1)=e^1(1+1)=2e$$

Ainsi :

$$(f^{-1})'(e)=\frac{1}{2e}$$

Équation de la tangente :

$$y=(f^{-1})'(e)(x-e)+f^{-1}(e)$$

$$y=\frac{1}{2e}(x-e)+1=\frac{1}{2e}x-\frac{1}{2}+1$$

$$y=\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2}$$

Réponse : $\boxed{A.\quad y=\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2}}$

11. **Problème :** Calculer l'intégrale

$$\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx$$

1. Décomposition de l'intégrande :

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{2-(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2}-1$$

Calcul de l'intégrale :

$$\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^2}dx=\int_0^1\left(\frac{2}{1+x^2}-1\right)dx$$

$$=2\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-\int_0^1 1dx$$

$$=2[\arctan x]_0^1-[x]_0^1=2(\arctan 1-\arctan 0)-(1-0)$$

$$=2\left(\frac{\pi}{4}-0\right)-1=\frac{\pi}{2}-1$$

Réponse : $\boxed{B.\quad \frac{\pi}{2}-1}$

12. **Problème :** Calculer la valeur de l'intégrale

$$I_4=\int_{-1}^1(x^2-1)^4\,dx$$

Développement du polynôme :

$$(x^2-1)^4=\sum_{k=0}^4 C_4^k(x^2)^{4-k}(-1)^k=x^8-4x^6+6x^4-4x^2+1$$

Calcul de l'intégrale terme à terme :

$$I_4=\int_{-1}^1(x^8-4x^6+6x^4-4x^2+1)dx$$

En utilisons la propriété : Si f est pair alors $\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$. la fonction : $x\mapsto x^8-4x^6+6x^4-4x^2+1$ est paire donc :

$$I_4=2\int_0^1 x^8-4x^6+6x^4-4x^2+1\quad dx$$

$$=2\left[\frac{x^9}{9}\right]_0^1-8\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1+12\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1-8\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+2[x]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{9}\right) - 8\left(\frac{1}{7}\right) + 12\left(\frac{1}{5}\right) - 8\left(\frac{1}{3}\right) + 2$$

$$= \frac{2}{9} - \frac{8}{7} + \frac{12}{5} - \frac{8}{3} + 2 = \frac{70}{315} - \frac{360}{315} + \frac{756}{315} - \frac{840}{315} + \frac{630}{315}$$

$$= \frac{70 - 360 + 756 - 840 + 630}{315} = \frac{256}{315}$$

Réponse : $\boxed{D. \quad \frac{256}{315}}$

13. Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ parmi les options proposées.

Utilisation des formules d'angle moitié : Nous savons que :

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 \Rightarrow \cos(\theta) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(2\theta)}{2}}$$

Remplaçons θ par $\frac{x}{2}$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

Partons de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et appliquons deux fois la formule d'angle moitié :

— Première application $\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

— Seconde application $\left(\frac{\pi}{16}\right)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Réponse : $\boxed{D. \quad \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

14. Trouver la forme algébrique du nombre complexe

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$$

Forme exponentielle : Le nombre complexe peut s'écrire sous forme exponentielle :

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$$

car :

$$\cos(\pi/3) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Calcul de la puissance :

$$\left(e^{i\pi/3}\right)^{2023} = e^{i\cdot 2023\pi/3}$$

Simplification de l'angle : Divisons 2023 par 6 (puisque $2\pi \equiv 0\ [2\pi]$) :

$$2023 \div 3 = 674 \times 3 + 1$$

Donc :

$$2023\frac{\pi}{3} = 674\pi + \frac{\pi}{3}$$

Comme $e^{i674\pi} = (e^{i2\pi})^{337} = 1^{337} = 1$, il reste :

$$e^{i\cdot 2023\pi/3} = e^{i(\pi/3+674\pi)} = e^{i\pi/3}\cdot e^{i674\pi} = e^{i\pi/3}$$

Retour à la forme algébrique :

$$e^{i\pi/3} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Réponse : $\boxed{A. \quad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

15. Soit le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$, déterminer z^5 parmi les options proposées.

Forme trigonométrique de z :

$$z = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Calcul de z^5 : En utilisant la formule de De Moivre :

$$z^5 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^5 = 2^5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= 32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -16\sqrt{3} + 16i = -16(\sqrt{3} - i) = -16\bar{z}$$

Réponse : $\boxed{C. \quad -16\bar{z}}$

16. Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation complexe :

$$2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$$

où $m \in \mathbb{C}^*$, $m \neq 1, i$. Calculer $\mathrm{Im}(z_1) \times \mathrm{Im}(z_2)$.

Solution détaillée :

Étape 1 : Relations connues Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = (m+1) + i & (1) \\ z_1 z_2 = \dfrac{m^2 + (1+i)m + i}{2} = \dfrac{m^2+m}{2} + \dfrac{m+1}{2}i & (2) \end{cases}$$

En notant $z_k = a_k + ib_k$ $(k = 1, 2)$, cela donne :

$$a_1 + a_2 = m + 1 \qquad (3)$$

$$b_1 + b_2 = 1 \qquad (4)$$

Pour le produit :

$$a_1a_2 - b_1b_2 = \frac{m^2+m}{2} \qquad (5)$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = \frac{m+1}{2} \qquad (6)$$

Étape 2 : Expression des parties réelles À partir de (3) et (6) :

$$a_2 = (m+1) - a_1$$

$$a_1b_2 + [(m+1) - a_1]b_1 = \frac{m+1}{2}$$

Simplification :

$$a_1(b_2 - b_1) + (m+1)b_1 = \frac{m+1}{2}$$

$$a_1 = \frac{(m+1)\left(\frac{1}{2} - b_1\right)}{b_2 - b_1} \quad \text{(via (4)}$$

Étape 3 : Simplification Avec $b_2 = 1 - b_1$:

$$a_1 = \frac{(m+1)\left(\frac{1}{2} - b_1\right)}{1 - 2b_1}$$

$$= \frac{m+1}{2}$$

Étape 4 : Calcul de b_1b_2 Substitution dans (5) :

$$\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 - b_1b_2 = \frac{m^2+m}{2}$$

$$b_1b_2 = \frac{(m+1)^2}{4} - \frac{m^2+m}{2}$$

$$= \frac{1-m^2}{4}$$

Réponse : $\boxed{C. \quad \frac{1-m^2}{4}}$

17. **Équation :** $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$ avec $y(0) = -4$, $y'(0) = 6$.

Équation caractéristique

$$r^2 + r + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Delta = 1 - 10 = -9$$

$$r = \frac{-1 \pm 3i}{2}$$

Solution générale

$$y(x) = e^{-x/2}\left(A\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$$

Conditions initiales

$y(0) = A = -4$

$y'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x/2}(\cdots) + e^{-x/2}\left(-\frac{3}{2}A\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{3}{2}B\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$

$y'(0) = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B = 6$

$\Rightarrow 2 + \frac{3}{2}B = 6 \Rightarrow B = \frac{8}{3}$

Solution :

$$y(x) = e^{-x/2}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$$

Réponse : $\boxed{D. \quad e^{-x/2}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)}$

18. **Donnés :**

— Plan P : $2x - y - 2z + 2 = 0$ (vecteur normal $\vec{n} = (2, -1, -2)$)

— Sphère : $x^2 - 6x + y^2 + z^2 + 10z - 2 = 0$

Centre de la sphère

$$(x-3)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 36$$

Centre $C(3, 0, -5)$

Droite perpendiculaire La droite a pour vecteur directeur $\vec{n} = (2, -1, -2)$ et passe par C :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -5 - 2t \end{cases}$$

Réponse : $\boxed{A. \quad \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -t \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -5 - 2t \end{cases}}$

19. **Données :**

— Total élèves : 300

— Cyber Sécurité : 60 élèves (30% filles)

— Sport : 90 élèves (60% filles)

— Environnement : 150 élèves (72% filles)

Probabilité que l'élève soit une fille

Calculons le nombre total de filles :

Cyber Sécurité : $60 \times 0.30 = 18$ filles

Sport : $90 \times 0.60 = 54$ filles

Environnement : $150 \times 0.72 = 108$ filles

Total filles : $18 + 54 + 108 = 180$

Probabilité :

$$P(\text{Fille}) = \frac{180}{300} = 0.6$$

Réponse : $\boxed{C. \quad 0.6}$

20. **Probabilité conditionnelle**

Sachant que c'est un garçon (120 garçons au total), probabilité qu'il soit en Environnement :

Nombre de garçons par club :

$$\text{Cyber Sécurité} : 60 - 18 = 42$$

$$\text{Sport} : 90 - 54 = 36$$

$$\text{Environnement} : 150 - 108 = 42$$

$$\text{Total garçons} : 42 + 36 + 42 = 120$$

Probabilité conditionnelle :

$$P(\text{Environnement} \mid \text{Garçon}) = \frac{42}{120} = 0.35$$

Réponse : $\boxed{B.\quad 0.35}$