Concours ENSA 2021 - Correction suggérée par le professeur Taher Bouyguir

Solution

1. Une condition nécessaire est une condition qui doit être vraie pour réussir, mais qui n'est pas forcément suffisante à elle seule.
   - A. Non, répondre correctement à tout n'est pas *nécessaire*
   - B. Non, ce serait une condition suffisante mais pas nécessaire
   - C. Non, c'est une condition de performance, pas une condition préalable
   - D. Oui, passer le concours est bien une condition nécessaire (mais pas suffisante)

   Réponse : $\boxed{D.\quad \text{avoir passé le concours}}$

2. Donné : 17 juillet 2021 = samedi

   Calcul pour 29 février 2024 : **Calcul du nombre de jours écoulés** Les années concernées sont :
   - 2022 : 365 jours
   - 2023 : 365 jours
   - Janvier et février 2024 : $31 + 29 = 60$ jours

   Le total est donc :

   $$365 \times 2 + 60 = 760 \text{ jours}$$

   Calcul du reste On divise 760 par 7 :

   $$760 \div 7 = 108 \text{ semaines} + 3 \text{ jours}$$

   Détermination du jour final Étant donné que le **17 juillet 2021** était un **samedi**, et que nous avons un reste de **3 jours**, nous avançons :
   - Samedi → Dimanche
   - Dimanche → Lundi
   - Lundi → **Mardi**

   Réponse : $\boxed{A.\quad Mardi}$

3. **Nombre de diviseurs**

   Factorisation :

   $$72 = 2^3 \times 3^2 \Rightarrow 72^{10} = 2^{30} \times 3^{20}$$

   $$162 = 2 \times 3^4 \Rightarrow 162^{50} = 2^{50} \times 3^{200}$$

   Donc $N = 2^{80} \times 3^{220}$ alors nombre de diviseurs :

   $$(80+1)(220+1) = 81 \times 221 = 17901$$

   Réponse : $\boxed{D.\quad 17901}$

4. Soient x et y deux réels non nuls tels que $xy = 1$ (inverses l'un de l'autre). On a la condition :

   $$(x+y)^2 + (x^2+y^2) = 10$$

   Étape 1 : Simplification

   $$(x+y)^2 + (x^2+y^2) = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + y^2$$

   $$= 2x^2 + 2y^2 + 2xy = 10$$

   $$= x^2 + y^2 + xy = 5$$

   Étape 2 : Utilisation de $y = \dfrac{1}{x}$

   $$x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = 5 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 4 \Rightarrow x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

   Étape 3 : Résolution Posons $u = x^2$:

   $$u^2 - 4u + 1 = 0$$

   Solutions : ($\Delta = 12 > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$)

   $$x^2 = u = 2 \pm \sqrt{3}$$

   Réponse : $\boxed{A.\quad 2-\sqrt{3} \text{ ou } 2+\sqrt{3}}$

5. Calculons le produit : (en uilisant : $\sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}$)

   $$\prod_{k=0}^{9} \sqrt[3\times 2^k]{5} = \prod_{k=0}^{9} 5^{\frac{1}{3\cdot 2^k}} = 5^{\frac{1}{3\cdot 2^0}} + 5^{\frac{1}{3\cdot 2^1}} + \ldots 5^{\frac{1}{3\cdot 2^9}}$$

   $$5^{\frac{1}{3\cdot 2^0} + \frac{1}{3\cdot 2^1} + \cdots + \frac{1}{3\cdot 2^9}} = 5^{\sum_{k=0}^{9} \frac{1}{3\cdot 2^k}}$$

   On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} \frac{1}{3\cdot 2^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{9} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

   En utilisant la somme d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

   $$\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \frac{1-(1/2)^{10}}{1-(1/2)} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)$$

   $$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3\cdot 2^9} = \frac{2^{10}-1}{3\cdot 2^9} = \frac{1023}{3\cdot 2^9} = \frac{1}{3} \times \frac{1023}{512}$$

Donc :

$$\prod_{k=0}^{9} \sqrt[3\times 2^k]{5} = 5^{\frac{1}{3}\times\frac{1023}{512}} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1023}{512}} = \sqrt[3]{5^{\frac{1023}{512}}}$$

Réponse : $\boxed{C.\quad \sqrt[3]{5^{\frac{1023}{512}}}}$

6. Nous cherchons à calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n e^{-3n}$$

Méthode 1 (utilisons : $3^n = e^{n\ln(3)}$)

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n e^{-3n} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(3)} e^{-3n} = \lim_{n\to+\infty} e^{n(\ln(3)-3)} = 0$$

Car : $\lim_{n\to+\infty} n(\ln(3)-3) = -\infty \quad (\ln(3)-3) < 0$

Méthode 2

$$3^n e^{-3n} = \left(\frac{3}{e^3}\right)^n$$

Calculons la valeur de $\dfrac{3}{e^3}$:

$$e^3 \approx 20.0855$$

$$\frac{3}{e^3} \approx \frac{3}{20.0855} \approx 0.1494$$

Comme $0 < \frac{3}{e^3} < 1$, nous avons une suite géométrique de raison strictement entre 0 et 1.

Pour toute suite géométrique r^n avec $0 < r < 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$$

Réponse : $\boxed{B.\quad 0}$

7. On considère la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left((3+\sqrt{5})^n \pi\right)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair. Notons-le $2k_n$ où $k_n \in \mathbb{Z}$.

Expression de $(3+\sqrt{5})^n$

$$(3+\sqrt{5})^n = 2k_n - (3-\sqrt{5})^n$$

Comportement des termes

— $(3+\sqrt{5}) > 1$

— $(3-\sqrt{5}) \approx 0.764$ ($0 < 3-\sqrt{5} < 1$, tend vers 0)

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left((3+\sqrt{5})^n \pi\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left((2k_n - (3-\sqrt{5})^n)\pi\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(2k_n\pi - (3-\sqrt{5})^n \pi\right) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left((3-\sqrt{5})^n \pi\right)$$

$$= 0 \quad \text{Car : } 0 < 3-\sqrt{5} < 1$$

Réponse : $\boxed{C.\quad 0}$

8. Nous cherchons à calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$$

Évaluation directe En substituant $x = \frac{\pi}{6}$, nous obtenons une forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Application de la règle de l'Hôpital Dérivons le numérateur et le dénominateur :

$$(\sqrt{3}\sin x - \cos x)' = \sqrt{3}\cos x + \sin x$$

$$\left(x - \frac{\pi}{6}\right)' = 1$$

Calcul de la nouvelle limite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\cos x + \sin x}{1} = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

Réponse : $\boxed{C.\quad 2}$

9. Nous cherchons à calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to0^+} x^{\left(\frac{1}{\ln 3x}\right)}$$

Réécriture sous forme exponentielle

$$x^{\left(\frac{1}{\ln 3x}\right)} = e^{\frac{\ln x}{\ln 3x}}$$

Simplification de l'exposant Posons $y = \ln x$. Quand $x \to 0^+$, $y \to -\infty$. L'exposant devient :

$$\frac{\ln x}{\ln 3x} = \frac{y}{\ln 3 + y}$$

Calcul de la limite de l'exposant

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{y}{\ln 3 + y} = \lim_{y\to-\infty} \frac{1}{\frac{\ln 3}{y} + 1} = 1$$

Calcul de la limite finale

$$\lim_{x\to0^+} e^{\frac{\ln x}{\ln 3x}} = e^1 = e$$

Réponse : $\boxed{A.\quad e}$

10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique ($T > 0$) telle que : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad$ où $\quad L \in \mathbb{R}^*$

Propriété des fonctions périodiques Pour une fonction périodique non constante, la limite en $+\infty$ n'existe pas car elle oscille indéfiniment. En effet :

$$f(x+nT) = f(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc la suite $f(x_n)$ avec $x_n = x_0 + nT$ est constante et ne converge pas vers L sauf si f est constante.

Analyse des options

— A et B : Une fonction strictement monotone ne peut être périodique (contradiction)

— C : Exclue car $L \neq 0$

— D : Seule possibilité cohérente avec l'existence de la limite

Conclusion : La seule fonction T-périodique admettant une limite finie non nulle en $+\infty$ est une fonction constante non nulle.

Réponse : $\boxed{D.\quad f \text{ est une constante non nulle}}$

11. Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calcul de la dérivée en 0 par définition

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(x + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

Car :

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

Les limites des bornes tend vers 0 donc : $x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \mapsto 0$ Ainsi :

$$f'(0) = 0 + 0 = 0$$

Réponse : $\boxed{B.\quad f'(0) = 0}$

12. Considérons la même fonction f que dans Q11 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Dérivée première (connue de Q11) Nous savons que $f'(0) = 0$.

Calcul de la dérivée seconde Par définition :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(h)}{h}$$

Calcul de $f'(x)$ pour $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x + 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Analyse de la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h + 3h^2 \cos\left(\frac{1}{h}\right) + h \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h}$$

$$= 2 + 3h \cos\left(\frac{1}{h}\right) + \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

Quand $h \to 0$:

— 2 reste constant

— $3h \cos\left(\frac{1}{h}\right) \to 0$ (borné par l'encadrement)

— $\sin\left(\frac{1}{h}\right)$ entre -1 et 1 (pas de limite)

Conclusion : La limite n'existe pas car le terme $\sin\left(\frac{1}{h}\right)$ n'admet pas de limite .

Réponse : $\boxed{D.\quad f \text{ n'est pas deux fois dérivable en } 0}$

13. Nous cherchons à calculer l'aire sous la courbe $y = \cos(\ln x)$ entre $x = e^{\pi/2}$ et $x = e^{\pi}$.

$$\text{Aire} = \int_{e^{\pi/2}}^{e^{\pi}} \cos(\ln x)\, dx$$

En utilisons Changement de variable Posons :

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \quad \text{et} \quad x = e^u$$

Les bornes deviennent :

$$x = e^{\pi/2} \Rightarrow u = \pi/2 \quad \text{et} \quad x = e^{\pi} \Rightarrow u = \pi$$

l'intégrale deviennent :

$$\text{Aire} = \int_{e^{\pi/2}}^{e^{\pi}} \cos(\ln x)\, dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos(u) \cdot e^u\, du$$

Intégration par parties Posons :

$$\begin{cases} v = \cos(u) \Rightarrow dv = -\sin(u)du \\ dw = e^u du \Rightarrow w = e^u \end{cases}$$

$$\int e^u \cos(u)du = e^u \cos(u) + \int e^u \sin(u)du$$

Nouvelle intégration par parties pour $\int e^u \sin(u)du$:

$$\begin{cases} v = \sin(u) \Rightarrow dv = \cos(u)du \\ dw = e^u du \Rightarrow w = e^u \end{cases}$$

$$\int e^u \sin(u)du = e^u \sin(u) - \int e^u \cos(u)du$$

Résolution du système En combinant les résultats :

$$\int e^u \cos(u)du = e^u \cos(u) + e^u \sin(u) - \int e^u \cos(u)du$$

$$2\int e^u \cos(u)du = e^u(\cos(u) + \sin(u))$$

$$\int e^u \cos(u)du = \frac{e^u(\cos(u) + \sin(u))}{2}$$

Évaluation entre les bornes

$$\left[\frac{e^u(\cos(u) + \sin(u))}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{e^{\pi}(-1+0)}{2} - \frac{e^{\pi/2}(0+1)}{2}$$

$$= -\frac{e^{\pi}}{2} - \frac{e^{\pi/2}}{2} = -\frac{1}{2}(e^{\pi} + e^{\pi/2})$$

Valeur absolue L'aire est toujours positive, donc :

Aire $= \frac{1}{2}(e^{\pi} + e^{\pi/2})$

Réponse : $\boxed{A. \quad \frac{1}{2}(e^{\pi} + e^{\frac{\pi}{2}})}$

14. Soit $f : [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ continue avec $f(x) \neq -1$ et vérifiant :

$$f(x) \cdot f(\alpha - x) = 1 \quad \forall x \in [0, \alpha]$$

Utilisons la Symétrie de l'intégrale

Considérons le changement de variable $u = \alpha - x$, $du = -dx$:

$$I = \int_0^{\alpha} \frac{1}{1+f(x)} dx = \int_{\alpha}^{0} \frac{1}{1+f(\alpha-u)}(-du)$$

$$I = \int_0^{\alpha} \frac{1}{1+\frac{1}{f(u)}} du = \int_0^{\alpha} \frac{1}{1+\frac{1}{f(x)}} dx$$

Simplification

$$\frac{1}{1+\frac{1}{f(x)}} = \frac{f(x)}{1+f(x)}$$

Donc :

$$I = \int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{1+f(x)} du$$

Somme des deux expressions

$$I + I = \int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{1+f(x)} + \frac{f(x)}{1+f(x)} \right) dx = \int_0^{\alpha} 1 dx = \alpha$$

$$2I = \alpha \Longrightarrow I = \frac{\alpha}{2}$$

Réponse : $\boxed{A. \quad \frac{\alpha}{2}}$

15. Soit la fonction $f(x) = e^{-x}\sin(x)$. Nous cherchons sa dérivée quatrième $f^{(4)}(x)$.

Calcul des dérivées successives

$$f'(x) = -e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

$$f''(x) = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x)$$

$$= -2e^{-x}\cos x$$

$$f'''(x) = 2e^{-x}\cos x - 2e^{-x}(-\sin x) = 2e^{-x}(\cos x + \sin x)$$

$$f^{(4)}(x) = -2e^{-x}(\cos x + \sin x) + 2e^{-x}(-\sin x + \cos x)$$

$$= -4e^{-x}\sin x = -4f(x)$$

Réponse : $\boxed{B. \quad -4f(x)}$

16. Soit la fonction $f(x) = e^{-x}\sin(x)$. Nous cherchons à calculer :

$$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin(x)\, dx$$

Intégration par parties Utilisons la formule d'intégration par parties deux fois. Posons :

$$I = \int e^{-x}\sin(x)\, dx$$

Première intégration :

$$\begin{cases} u = \sin(x) \Longrightarrow du = \cos(x)dx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I = -e^{-x}\sin(x) + \int e^{-x}\cos(x)dx$$

Deuxième intégration :

$$\begin{cases} u = \cos(x) \Longrightarrow du = -\sin(x)dx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int e^{-x}\cos(x)dx = -e^{-x}\cos(x) - \int e^{-x}\sin(x)dx$$

Résolution du système En substituant :

$$I = -e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x) - I$$

$$2I = -e^{-x}(\sin(x) + \cos(x))$$

$$I = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x) + \cos(x))$$

Évaluation entre 0 et π

$$\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin(x) + \cos(x)) \right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-\pi}(0 + (-1)) - \left(-\frac{1}{2}e^{0}(0+1) \right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\pi} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})$$

Réponse : $\boxed{B. \quad \frac{1}{2}(1+e^{-\pi})}$

17. Considérons l'équation complexe :

$$z\bar{z} + 4iz = -3 + 4i$$

Expression de z Posons $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$z\bar{z} = x^2 + y^2$$

$$4iz = -4y + 4ix$$

Substitution dans l'équation

$$x^2 + y^2 - 4y + 4ix = -3 + 4i$$

Séparation parties réelle/imaginaire

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = -3 & \text{(partie réelle)} \\ 4x = 4 & \text{(partie imaginaire)} \end{cases}$$

De la partie imaginaire : $4x = 4 \Longrightarrow x = 1$

Substituons $x = 1$ dans la partie réelle :

$$1 + y^2 - 4y = -3 \Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (y-2)^2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

Solution : $z = 1 + 2i$

Réponse : $\boxed{A.\quad \mathrm{Re}(u) \times \mathrm{Im}(u) = 2}$

18. Soit l'équation complexe :

$$z^2 - 2\bar{z} + 3 = 0$$

Substitution Posons $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$. En substituant :

$$(x+iy)^2 - 2(x-iy) + 3 = 0$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy - 2x + 2iy + 3 = 0$$

Séparation des parties

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 3 = 0 & \text{(Partie réelle)} \\ 2xy + 2y = 0 & \text{(Partie imaginaire)} \end{cases}$$

Résolution du système

— De l'équation imaginaire : $2y(x+1) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ ou $x = -1$

— **Cas $y = 0$:**

$x^2 - 2x + 3 = 0$

Discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0$

Aucune solution réelle

— **Cas x = -1 :**

$(-1)^2 - y^2 - 2(-1) + 3 = 0$

$\Rightarrow y^2 = 6 \Rightarrow\Rightarrow y = \pm\sqrt{6}$

Solutions : $z_1 = -1 + i\sqrt{6}, \quad z_2 = -1 - i\sqrt{6}$

Calcul de la partie réelle

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+i\sqrt{6}}{-1-i\sqrt{6}} \times \frac{-1+i\sqrt{6}}{-1+i\sqrt{6}} = \frac{1-6-2i\sqrt{6}}{1+6} = \frac{-5-2i\sqrt{6}}{7}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{5}{7}$$

Réponse : $\boxed{D.\ -\frac{5}{7}}$

19. Soit $z = \cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta$.

Réécriture de z

$$z = \cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta \cdot e^{i\theta}$$

Calcul de z^{-3}

$$z^{-3} = \frac{1}{z^3} = \frac{1}{\cos^3\theta \cdot e^{i3\theta}} = \frac{1}{\cos^3\theta} e^{-i3\theta}$$

Partie réelle

$$\mathrm{Re}(z^{-3}) = \frac{\cos 3\theta}{\cos^3\theta}$$

Réponse : $\boxed{C.\ \frac{\cos 3\theta}{\cos^3\theta}}$

20. En utilisant la formule de Moivre et le binôme de Newton :

Formule de Moivre

$$\cos 5\theta = \mathrm{Re}(e^{i5\theta}) = \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^5)$$

Développement binomial

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k \cos^{5-k}\theta (i\sin\theta)^k$$

Extraction de la partie réelle Seuls les termes avec k pair contribuent :

$$C_5^0 \cos^5\theta (i\sin\theta)^0 + C_5^2 \cos^3\theta (i\sin\theta)^2 + C_5^4 \cos^1\theta (i\sin\theta)^4$$

$$= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$

Réponse : $\boxed{D.\ \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta}$