Concours ENSA 2019 - Correction suggérée par le professeur Taher Bouyguir

Solution

1. Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{(b^2+ab-a^2)u_n - a^2}{b^2u_n + b^2 - ab - a^2} \\ u_0 = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Étape 1 : Calcul de v_0, u_1 et v_1

(a) **Calcul de v_0 :**

$$v_0 = \frac{b}{bu_0 - a} = \frac{b}{b\cdot\frac{b}{a} - a} = \frac{ab}{b^2 - a^2}$$

(b) **Calcul de u_1 :**

$$u_1 = \frac{(b^2+ab-a^2)\frac{b}{a} - a^2}{b^2\cdot\frac{b}{a} + b^2 - ab - a^2} = \frac{\frac{b^3+ab^2-a^2b}{a} - a^2}{\frac{b^3}{a} + b^2 - ab - a^2}$$

$$= \frac{\frac{b^3+ab^2-a^2b-a^3}{a}}{\frac{b^3+ab^2-a^2b-a^3}{a}} = 1$$

(c) **Calcul de v_1 :**

$$v_1 = \frac{b}{bu_1 - a} = \frac{b}{b\cdot 1 - a} = \frac{b}{b-a}$$

Étape 2 : Détermination de la raison

La différence entre termes consécutifs :

$$v_1 - v_0 = \frac{b}{b-a} - \frac{ab}{b^2-a^2} = \frac{b(b+a)-ab}{(b-a)(b+a)} = \frac{b^2}{b^2-a^2}$$

Étape 3 : Expression générale de v_n

La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{b^2}{b^2-a^2}$:

$$v_n = v_0 + nr = \frac{ab}{b^2-a^2} + n\cdot\frac{b^2}{b^2-a^2} = \frac{ab+nb^2}{b^2-a^2}$$

Étape 4 : Expression de u_n

En inversant la relation $v_n = \dfrac{b}{bu_n - a}$ On trouve :

$$u_n = \frac{b + av_n}{bv_n}$$

Calcul de u_n en fonction de n :

$$u_n = \frac{b + a\cdot\frac{ab+nb^2}{b^2-a^2}}{b\cdot\frac{ab+nb^2}{b^2-a^2}} = \frac{b(b^2-a^2)+a(ab+nb^2)}{b(ab+nb^2)}$$

$$= \frac{b^3 - a^2b + a^2b + nab^2}{ab^2 + nb^3} = \frac{b^3+nab^2}{b^2(a+nb)}$$

$$= \frac{b+na}{a+nb} = \frac{an+b}{bn+a}$$

Réponse finale : $\boxed{A.\ \dfrac{an+b}{bn+a}}$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+n}$$

Déterminer à quel intervalle I appartient u_n.

Encadrement des termes

$$1 \le k \le n \Rightarrow 2+n \le 2k+n \le 3n \Rightarrow \frac{1}{3n} \le \frac{1}{2k+n} \le \frac{1}{2+n}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3n} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+n} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+n} \Rightarrow \frac{1}{3} \le u_n \le \frac{n}{2+n}$$

on a : $n < 2+n \Rightarrow \dfrac{n}{2+n} < 1$ Alors : $\dfrac{1}{3} \le u_n < 1$

Réponse : $\boxed{B.\quad I = \left[\frac{1}{3}, 1\right[}$

3. On considère la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+n}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Réécriture de la somme

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\frac{k}{n}+1}$$

Rappel somme de Riemann :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Appliquons la règle

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{2x+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3 = \ln(\sqrt{3})$$

Réponse : $\boxed{C.\quad \ln(\sqrt{3})}$

4. Sachant que

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}},$$

calculer :

$$\int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx.$$

Étape 1 : Intégration par parties

$$\int \sqrt{4+x^2}\,dx = [x\sqrt{4+x^2}] - \int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}\,dx. \ (1)$$

et On a :

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \int \frac{4+x^2-4}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{4+x^2}{\sqrt{4+x^2}}\,dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx.$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = \int \sqrt{4+x^2}\,dx - 4\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx.$$

substitution dans (1)

$$\int \sqrt{4+x^2}\,dx = [x\sqrt{4+x^2}] - \int \sqrt{4+x^2}\,dx$$

$$+4\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\,dx.$$

Donc :

$$2\int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx = [x\sqrt{4+x^2}]_0^1 + 4\left[\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)\right]_0^1$$

$$2\int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx = \sqrt{5} + 4(\ln(1+\sqrt{5}) - \ln(2)).$$

$$\int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{2} + 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2} + \ln\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Réponse : $\boxed{D. \quad \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2}}$

5. Solution de l'équation trigonométrique (E) : $\cos^4(3x) + \sin^4(3x) = 1$

Nous commençons par simplifier l'expression $\cos^4\theta + \sin^4\theta$ en utilisant une identité remarquable :

$$\cos^4\theta + \sin^4\theta = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$= 1 - 2\cos^2\theta\sin^2\theta$$

Appliquons cette identité à notre équation avec $\theta = 3x$:

$$1 - 2\cos^2(3x)\sin^2(3x) = 1$$

Réduction de l'équation Simplifions l'équation obtenue :

$$-2\cos^2(3x)\sin^2(3x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos^2(3x)\sin^2(3x) = 0$$

Ce produit est nul si et seulement si :

$$\cos(3x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(3x) = 0$$

Résolution des équations élémentaires

(a) Cas $\cos(3x) = 0$:

$$3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donc :

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(b) Cas $\sin(3x) = 0$:

$$3x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donc :

$$x = \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Unification des solutions Nous pouvons remarquer que les solutions peuvent s'exprimer de manière unifiée :

$$x = \frac{k\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

En effet :

- Pour k pair ($k = 2m$) : $x = \frac{m\pi}{3}$ (cas $\sin(3x) = 0$)
- Pour k impair ($k = 2m+1$) : $x = \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{3}$ (cas $\cos(3x) = 0$)

Conclusion L'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$\boxed{D. \quad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

6. **Donnée :** Soit le réel

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}$$

On cherche à déterminer la valeur de λ parmi les options proposées.

Calcul de λ^4

Posons $a = \sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$ et $b = \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}$. Alors $\lambda = a - b$, et nous avons :

$$\lambda^4 = (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

Calculons a^4 et b^4 :

$$a^4 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}, \quad b^4 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi :

$$a^4 + b^4 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} + \frac{7-3\sqrt{5}}{2} = 7$$

Calculons ab :

$$ab = \sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = \sqrt[4]{\frac{49-45}{4}} = \sqrt[4]{1} = 1$$

En utilisant $ab = 1$, simplifions λ^4 :

$$\lambda^4 = (a^4 + b^4) - 4ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2$$

Calculons $a^2 + b^2$:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Longrightarrow a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab = \lambda^2 + 2$$

Substituons dans λ^4 :

$$\lambda^4 = 7 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 + 2) + 6 \cdot 1 = 7 - 4\lambda^2 - 8 + 6 = 5 - 4\lambda^2$$

Ainsi, nous obtenons l'équation :

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 - 5 = 0$$

Posons $x = \lambda^2$, alors :

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

Résolvons cette équation quadratique :

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

Les solutions sont $x = 1$ et $x = -5$. Comme $x = \lambda^2 \geq 0$, nous retenons $x = 1$, d'où :

$$\lambda^2 = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

Puisque $a = \sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} > b = \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}$, nous avons $\lambda = a - b > 0$. Ainsi :

$$\lambda = 1$$

Réponse : $\boxed{B. \quad \lambda = 1}$

7. **Donnée :** On cherche à calculer l'intégrale suivante pour $a > 0$:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Étape 1 : Interprétation géométrique

L'intégrale $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ représente l'aire sous la courbe $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ entre $x = 0$ et $x = a$. Cette courbe est la partie supérieure d'un cercle de rayon a centré à l'origine.

Étape 2 : Calcul de l'aire

L'équation $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ décrit un demi-cercle supérieur de rayon a. L'intégrale de 0 à a représente donc un quart de l'aire totale du cercle.

$$\text{Aire totale du cercle} = \pi a^2$$

$$\text{Aire du quart de cercle} = \frac{\pi a^2}{4}$$

Étape 3 : Vérification par calcul intégral

On peut aussi calculer directement l'intégrale en utilisant le changement de variable $x = a \sin\theta$:

$$dx = a\cos\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2(\theta)} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2(\theta))} = a\cos\theta$$

Pour $x = 0$, $\theta = 0$ et pour $x = a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. L'intégrale devient :

$$\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\, d\theta = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$$

En utilisant l'identité $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$:

$$a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}$$

Réponse : $\boxed{D. \quad \frac{\pi a^2}{4}}$

8. **Donnée :** On lance trois fois un dé à 6 faces, obtenant les résultats a, b et c. On considère le polynôme $Q(x) = ax^2 + bx + c$. On cherche la probabilité que Q admette une racine double.

Étape 1 : Condition pour une racine double

Le discriminant doit être nul :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Longrightarrow b^2 = 4ac.$$

Étape 2 : Analyse des cas possibles Les triplets (a, b, c) valides sont :

- $b = 2$: $ac = 1 \Longrightarrow (1, 2, 1)$.
- $b = 4$: $ac = 4 \Longrightarrow (1, 4, 4),\ (2, 4, 2),\ (4, 4, 1)$.
- $b = 6$: $ac = 9 \Longrightarrow (3, 6, 3)$.

Étape 3 : Dénombrement Total de triplets favorables : **5**.

nombre de tirages possibles : $6 \times 6 \times 6 = 216$

Calcul de la probabilité

$$P = \frac{5}{216}.$$

Réponse : $\boxed{C. \quad \frac{5}{216}}$.

9. **Donnée :** Urne avec 4 boules jaunes (J), 3 rouges (R) et 3 bleues (B). On tire 2 boules sans remise. On cherche la probabilité que la deuxième boule soit rouge.

   Étape 1 : Nombre total de tirages

   $$A_{10}^9 = 10 \times 9 = 90.$$

   Étape 2 : Cas favorables

   — Première boule non rouge (J ou B) puis rouge : $7 \times 3 = 21$.

   — Première boule rouge puis rouge : $3 \times 2 = 6$.

   — Total : $21 + 6 = 27$.

   Étape 3 : Probabilité

   $$P = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}.$$

   Réponse : $\boxed{\frac{3}{10}}$.

10. **Donnée :** Probabilité que la deuxième boule soit rouge sachant que la première est jaune.

    Étape 1 : Situation après tirage Il reste 9 boules (3J, 3R, 3B).

    Étape 2 : Probabilité conditionnelle

    $$P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

    Réponse : $\boxed{\frac{1}{3}}$.

    Méthode 2

    — le nombre de tirage $(J_i; R_i)$ est : $4 \times 3 = 12$

    — le nombre de tirage $(J_i; B_i)$ est : $4 \times 3 = 12$

    — le nombre de tirage $(J_i; J_j)$ est : $A_4^2 = 12$

    Donc la probabilité est : $P = \frac{12}{12 \times 3} = \frac{1}{3}$.

11. **Donnée :** Soit le nombre complexe $z = -1 + \sqrt{2} + i$. On cherche à déterminer son argument .

    Étape 1 : Expression sous forme exponentielle

    Nous cherchons à écrire z sous la forme :

    $$z = re^{i\theta}$$

    où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.

    Étape 2 : Calcul du module

    $$r = \sqrt{(-1+\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

    Étape 3 : Détermination de l'argument Par identification avec la forme exponentielle :

    $$-1 + \sqrt{2} = r\cos\theta \quad \text{et} \quad 1 = r\sin\theta$$

    Le rapport donne :

    $$\tan\theta = \frac{1}{-1+\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

    Nous reconnaissons que :

    $$\theta = \frac{3\pi}{8} \quad \text{car} \quad \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1 + \sqrt{2}$$

    Étape 4 : Vérification du quadrant

    — $\Re(z) = -1 + \sqrt{2} > 0$ (car $\sqrt{2} \approx 1.414 > 1$)

    — $\Im(z) = 1 > 0$

    Donc z est dans le premier quadrant, ce qui confirme $\theta = \frac{3\pi}{8}$.

    Réponse : $\boxed{A. \quad \frac{3\pi}{8}}$

12. **Donnée :** On cherche la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.

    Étape 1 : Relation d'angle Remarquons que :

    $$\frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$$

    On peut donc utiliser la propriété des cosinus pour les angles supplémentaires :

    $$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

    Étape 2 : Calcul de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ En utilisant la formule du demi-angle :

    $$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

    $$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

    Étape 3 : Détermination du signe Comme $\frac{5\pi}{8}$ est dans le deuxième quadrant, son cosinus est négatif :

    $$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

    Réponse : $\boxed{B. \quad -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

13. **Donnée :** Soit $a = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. On cherche la valeur de a .

    Étape 1 : Utilisation de l'identité trigonométrique Considérons l'expression $a\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$:

    $$a\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Étape 2 : Application de la formule du double angle Utilisons l'identité $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$alors : \quad \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

$$d'où \quad a\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

$$a\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\Rightarrow a\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

Étape 3 : Simplification Comme $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, on a :

$$a\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Étape 4 : Résolution pour a En divisant les deux côtés par $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ (non nul) :

$$a = \frac{1}{4}$$

Réponse : $\boxed{C. \quad \frac{1}{4}}$

14. On peut utiliser l'identité trigonométrique suivante :

$$\cos A\cos B + \sin A\sin B = \cos(A - B)$$

En appliquant cette identité avec $A = \frac{\pi}{5}$ et $B = \frac{2\pi}{5}$, on obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$$

Puisque $\cos(-x) = \cos x$, on obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

En utilisant la donnée $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}$, on peut écrire :

$$\frac{1}{4} + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Ainsi, en isolant b, on trouve :

$$b = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - \frac{1}{4}$$

On sait que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Donc :

$$b = \frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Réponse : $\boxed{B. \quad \frac{\sqrt{5}}{4}}$

15. **Donnée :** Soient A et B deux points distincts du plan. On cherche à déterminer la nature de l'ensemble des points M vérifiant :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$$

Simplification de l'équation

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$$

$$\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{BM}) = 0 \quad (*)$$

Soit G le barycentre du système pondérés : $\{(A;1),(B;-4)\}$ donc d'après la propriété caractéristique du barycentre pour tout point M du plan : $\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{BM} = -3\overrightarrow{GM}$

Alors : $(*)$ devient : $-3\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{GM} = 0$

d'où : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{GM} = 0$ alors l'ensemble des points M est le cercle de diamètre $[AG]$

Réponse : $\boxed{B. \quad Cercle}$

16. **Donnée :** On cherche à simplifier l'expression :

$$u_n = \prod_{k=0}^{n}\frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4}$$

Étape 1 : Factorisation des polynômes Factorisons numérateur et dénominateur :

$$\frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4} = \frac{(k+2)(k+3)}{(k+1)(k+4)}$$

Étape 2 : Réécriture du produit

$$u_n = \prod_{k=0}^{n}\frac{(k+2)(k+3)}{(k+1)(k+4)} = \frac{\prod_{k=0}^{n}(k+2)(k+3)}{\prod_{k=0}^{n}(k+1)(k+4)}$$

Étape 3 : Séparation des produits

$$= \frac{\left(\prod_{k=0}^{n}(k+2)\right)\left(\prod_{k=0}^{n}(k+3)\right)}{\left(\prod_{k=0}^{n}(k+1)\right)\left(\prod_{k=0}^{n}(k+4)\right)}$$

Rappelons que : $n! = 1\times 2\times\cdots\times n$: alors

$$u_n = \frac{(2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n+2))(3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+3))}{(1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n+1))(4\cdot 5\cdot\cdots\cdot(n+4))}$$

On : $1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n+3) = (n+3)!$

$$\Rightarrow 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+3) = (n+3)!/2$$

de même : $4 \cdot 5 \cdots (n+4) = (n+4)!/(1 \cdot 2 \cdot 3) = (n+4)!/6$

d'où :

$$u_n = \frac{(n+2)!(n+3)!/2}{(n+1)!(n+4)!/6}$$

avec : $(n+2)! = (n+1)! \times (n+2)$ et $(n+4)! = (n+3)! \times (n+4)$ donc :

$$u_n = \frac{3(n+2)}{n+4} = \frac{3n+6}{n+4}$$

Réponse : $\boxed{D.\quad \frac{3n+6}{n+4}}$

17. **Donnée :** Le concours d'entrée à la première année des ENSA pour l'année 2019-2020 s'est déroulé le 23 Juillet 2019. On cherche à déterminer le nombre d'unités de 23^{2019}.

c'est-à-dire son dernier chiffre dans sa représentation décimale. Cela revient à calculer le reste de la division 23^{2019} par 10 .

Cherchons $0 \leq r < 10$ tel que : $23^{2019} \equiv r[10]$.

On a : $23 \equiv 3[10]$ (car : 10 divise $23-3$).

donc : $23^2 \equiv 3^2[10]$ et d'autre part : $3^2 \equiv -1[10]$

alors : $23^2 \equiv -1[10] \Rightarrow (23^2)^2 \equiv (-1)^2[10]$

$$\Rightarrow 23^4 \equiv 1[10]$$

maintenant décomposon le nombre 2019 :

$2019 = 4 \times 504 + 3$ alors :

$$23^4 \equiv 1[10] \Rightarrow (23^4)^{504} \equiv 1^{504}[10]$$

$$\Rightarrow 23^{2016} \equiv 1[10] \Rightarrow 23^{2016} \times 23^3 \equiv 23^3[10]$$

$$\Rightarrow 23^{2019} \equiv 23^3[10]$$

on déja : $23^2 \equiv -1[10] \Rightarrow 23^3 \equiv -23[10]$

et $-23 \equiv 7[10]$ alors $23^3 \equiv 7[10]$

$$d'où \quad 23^{2019} \equiv 7[10]$$

Réponse : $\boxed{D.\quad 7}$

18. Nous voulons résoudre le produit suivant :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(e^{2^k} + e^{-2^k}\right)$$

d'abord on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \left(e^{2^k} + e^{-2^k}\right)\left(e^{2^k} - e^{-2^k}\right) = \left(e^{2^{k+1}} - e^{-2^{k+1}}\right)$$

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\alpha_k = \left(e^{2^k} + e^{-2^k}\right)$ et $\beta_k = \left(e^{2^k} - e^{-2^k}\right)$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \alpha_k \beta_k = \beta_{k+1}$$

$$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k = \prod_{k=0}^{n} \beta_{k+1}$$

$$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n} \alpha_k \times \prod_{k=0}^{n} \beta_k = \prod_{k=0}^{n} \beta_{k+1}$$

On a : $\prod_{k=0}^{n} \beta_{k+1} = \beta_1 \cdot \beta_1 \cdot \cdots \cdot \beta_n \cdot \beta_{n+1} = \left(\prod_{k=1}^{n} \beta_k\right) \times \beta_{n+1}$

et $\prod_{k=0}^{n} \beta_k = \beta_0 \times \prod_{k=1}^{n} \beta_k$ d'où :

$$\prod_{k=0}^{n} \alpha_k \times \prod_{k=0}^{n} \beta_k = \prod_{k=0}^{n} \beta_{k+1}$$

$$\Rightarrow \prod_{k=0}^{n} \alpha_k \times \beta_0 \times \prod_{k=1}^{n} \beta_k = \left(\prod_{k=1}^{n} \beta_k\right) \times \beta_{n+1}$$

Simplification :

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \times \beta_0 = \beta_{n+1} \Rightarrow \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_0}$$

$$\prod_{k=0}^{n} \alpha_k = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_0} = \frac{e^{2^{n+1}} - e^{-2^{n+1}}}{e - e^{-1}}$$

Réponse : $\boxed{A.\quad \frac{e^{2^{n+1}} - e^{-2^{n+1}}}{e - e^{-1}}}$

19. **Donnée :** Soit $f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$ et u_n l'unique solution positive de $f_n(x) = 0$ pour $n > 0$.

Étape 1 : Analyse de la fonction

- $f_n(0) = -2 < 0$
- $f_n(1) = e + n - 3 > 0$ pour $n \geq 1$
- $f_n'(x) = e^x + 2nx > 0$ sur $\mathbb{R}^+$

Par le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance, $u_n \in]0;1[$ existe et est unique.

Étape 2 : Monotonie de u_n

$\forall x \in \mathbb{R}^+$:

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^x + (n+1)x^2 - 3 - e^x + nx^2 + 3 = x^2 \geq 0$$

d'où : $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \Rightarrow f_{n+1}(u_n) \geq f_n(u_n)$ or $f_n(u_n) = 0$ et $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$ donc :

$f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$

Comme f_n est strictement croissante alors f_n^{-1} est strictement croissante donc :

$f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1}) \Rightarrow f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(u_n)) \geq f_{n+1}^{-1}(f_{n+1}(u_{n+1})) \Rightarrow u_n \geq u_{n+1}$

Réponse : $\boxed{B.\text{ est décroissante}}$

20. **Donnée :** Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ où u_n est définie comme précédemment.

Étape 1 : Encadrement de u_n Comme u_n est décroissante et minorée par 0, elle converge vers $\ell \geq 0$.

Étape 2 : Passage à la limite

On a $f_n(u_n) = 0 \Rightarrow e^{u_n} + nu_n^2 = 3$, on déduit :

$$nu_n^2 \leq 3 \ (car\ e^{u_n} > 0) \Rightarrow 0 \leq u_n \leq \sqrt{\frac{3}{n}} \to 0$$

Ainsi $\ell = 0$.

Vérification : Si $\ell > 0$, le terme nu_n^2 tendrait vers $+\infty$, ce qui est incompatible avec l'égalité.

Réponse : $\boxed{B.\quad 0}$