ENSA - Concours et Correction suggérée par le professeur Taher Bouyguir

1 Concours d'Accés en 1ère année des ENSA Maroc - Juillet 2023

Q1. Voici une suite logique de nombres : 6 ; 4 ; 8 ; 5 ; 15,... Le nombre suivant est :			
A) 17	B) 20	C) 11	D) 40
Q2. Soit x un nombre de 6 chiffres divisible par 9 et y le nombre obtenu en déplaçant à la fin le premier chiffre de x. Le reste de la division de y par 9 est égal à :			
A) 0	B) 1	C) 2	D) 3
Q3. Le nombre de couples d'entiers premiers entre eux dont le produit vaut 150 est égal à :			
A) 4	B) 6	C) 8	D) 10
Q4. L'équation à variables réelles $9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$:			
A) admet une seule solution entière	B) admet trois solutions entières	C) admet cinq solutions entières	D) n'admet pas de solution entière
Q5. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$, $n \in \mathbb{N}$. ($[x]$ désigne la partie entière de x). $\lim_{n\to+\infty} u_{(n^2+2n)} =$			
A) 0	B) 1	C) 2	D) 3
Q6. $\lim_{x\to+\infty} e^x \sin(e^{-x}) =$			
A) 0	B) 1	C) -1	D) n'a pas de limite
Q7. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x^2+x-1)}{x} =$			
A) 0	B) 1	C) -1	D) n'a pas de limite
Q8. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Alors :			
A) f n'est pas constante	B) f est une constante	C) f est strictement croissante	D) f est strictement décroissante
Q9. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)(1-f(x)f(y)) = f(x)+f(y)$ Alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2} =$			
A) $f'(0)$	B) $f'(0)-1$	C) $f'(0)+\frac{1}{2}$	D) $f'(0)-\frac{1}{2}$

Q10. Pour tout réel $\alpha > 0$; $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx =$

A) $\ln\alpha$	B) $2\ln\alpha$	C) 0	D) $\alpha\frac{\pi}{2}$

Q11. On considère les deux intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2(x)\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2(x)\,dx$

La valeur de I :

A) $\frac{\pi^3}{48}$	B) $\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi}{4}$	C) $-\frac{\pi}{8}$	D) $\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$

Q12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{1445}\sin x\,dx =$

A) $\frac{1}{1445}$	B) $\frac{1}{1446}-\frac{\pi}{2}$	C) $\frac{1}{1446}$	D) $\frac{1}{1447}+\frac{\pi}{2}$

Q13. Soient z_1 et z_2 les solutions complexes de l'équation : $z^2 - 4iz - 4(1+i) = 0$ Alors : $\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$

A) 0	B) 4	C) 2	D) 3

Q14. Le nombre complexe $(1+i)^{2000} =$

A) 1	B) 4^{1000}	C) 4^{500}	D) 4^{200}

Q15. Le nombre complexe $\left(\frac{7-15i}{15+7i}\right)^{2023} =$

A) i	B) $-i$	C) -1	D) $i+1$

Q16. La somme $(1+e^{\frac{i2\pi}{5}}+e^{\frac{i4\pi}{5}}+e^{\frac{i6\pi}{5}}+e^{\frac{i8\pi}{5}})^{1000} =$

A) 0	B) 1	C) i	D) $-i$

Q17. La solution $f(x)$ de l'équation différentielle $y'' - 7y' + 12y = 0$ vérifiant $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ est :

A) $e^{-4x} - e^{3x}$	B) $e^{5x} - e^{3x}$	C) $e^{4x} - e^{3x}$	D) $e^{5x} - e^{4x}$

Q18. Soient d_A la distance du point $A(1,0,2)$ au plan $(P) : 2x + y + z + 4 = 0$; et d_B la distance du point $B(3,2,1)$ au plan $(Q) : x + 5y + 4z = 5$. Alors le produit des distances $d_A d_B$ est :

A) $\frac{8}{3\sqrt{7}}$	B) $\frac{10}{3\sqrt{7}}$	C) $\frac{11}{3\sqrt{7}}$	D) $\frac{13}{3\sqrt{7}}$

Q19. L'aire sous la cloche d'équation $y = \frac{1}{1+x^2}$ et au-dessus de la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{2}$ est :

A) $\frac{1}{3}$	B) $-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}$	C) $\frac{\pi}{2}$	D) $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$

Q20. On considère le cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 + x - 3y - 3 = 0$ et (D) la droite passant par le point A de coordonnées $(1,-2)$ et tangent à (C) au point M. La longueur du segment $[AM]$ est égale à :

A) 1	B) 2	C) 3	D) 4

1.1 Solution

1. **Q1. Suite logique : 6 ; 4 ; 8 ; 5 ; 15,...**

   Réponse : $\boxed{C)\quad 11}$

   Explication : La suite alterne entre soustraction et multiplication :

   $$6-2=4$$

   $$4\times 2=8$$

   $$8-3=5$$

   $$5\times 3=15$$

   $$15-4=11$$

2. **Q2. Nombre déplaçant le premier chiffre**

   Réponse : $\boxed{A)\quad 0}$

   Explication : Soit $x=\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ divisible par 9. Alors $y=\overline{a_2a_3a_4a_5a_6a_1}$.

   On a : $x-a_1\cdot 10^5=\overline{a_2a_3a_4a_5a_6}$ donc :

   $10\times(x-a_1\cdot 10^5)=\overline{a_2a_3a_4a_5a_60}$ alors

   $y=10(x-a_1\cdot 10^5)+a_1=10x-a_1\cdot 10^6+a_1=10x-a_1(10^6-1)=10x-99999a_1$. on a 9 dive x donc 9 divise aussi $10x$ et 9 divise $99999a_1$ alors 9 divise y d'où le reste est 0

3. **Q3. Couples premiers entre eux de produit 150**

   Réponse : $\boxed{C)\quad 8}$

   Explication : Factorisation $150=2\times 3\times 5^2$. Les couples (a,b) premiers entre eux sont :

   $$(1,150),(2,75),(3,50),(6,25),$$

   $$(25,6),(50,3),(75,2),(150,1)$$

4. **Q4. Équation** $9x^5-12x^4+6x-5=0$

   Réponse : $\boxed{D)\quad \text{n'admet pas de solution entière}}$

   Explication : par l'absurde , si cette équation admet une solution entière ($\in\mathbb{Z}$) alors cette solution soit pair ou soit impair , **cas 1** si x est pair donc : $9x^5$ est pair et $-12x^4+6x$ pair et -5 impair donc la somme $9x^5-12x^4+6x-5$ sera impair et On sait que 0 est pair alors $9x^5-12x^4+6x-5\neq 0$ ce qui absurde . **cas 2** si x est impair donc : $9x^5$ est impair et $-12x^4+6x$ pair et -5 impair donc la somme $9x^5-12x^4+6x-5$ sera impair et On sait que 0 est pair alors $9x^5-12x^4+6x-5\neq 0$ ce qui absurde .

5. **Q5.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{(n^2+2n)}=$

   Réponse : $\boxed{B)\quad 1}$

   Explication : $\forall n\in\mathbb{N}: n^2\leq n^2+2n<n^2+2n+1$ Donc $n\leq\sqrt{n^2+2n}<n+1$ alors : $[\sqrt{n^2+2n}]=n$ (d'après la définiton de la partie entière) . calculons maintenant la limite :

   $$\lim_{n\to+\infty} u_{(n^2+2n)}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+2n}-[\sqrt{n^2+2n}]$$

   $$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+2n}-n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}\ (\text{ conjugué })$$

   $$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}=1$$

6. **Q6.** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\sin(e^{-x})=$

   Réponse : $\boxed{D)\quad \text{n'a pas de limite}}$

   Explication : $\forall x\in\mathbb{R}: -1\leq\sin(e^{-x})\leq 1$ donc en $+\infty$ Le signe de $\sin(e^{-x})$ n'est pas spécifié (soit positive ou négative) .

7. **Q7.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos(x^2+x-1)}{x}=$

   Réponse : $\boxed{A)\quad 0}$

   Explication : $\forall x\in\mathbb{R}: -1\leq\cos(x^2+x-1)\leq 1$ et en $+\infty$ ($x>0$) donc $\dfrac{-1}{x}\leq\dfrac{\cos(x^2+x-1)}{x}\leq\dfrac{1}{x}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ (théorème d'encadrement)

8. **Q8.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ continue.

   Toute fonction continue d'un connexe vers un discret est constante (car sinon, elle violerait la propriété des valeurs intermédiaires).

   Réponse : $\boxed{B)\quad f\text{ est une constante}}$

9. **Q9.** $\forall x\in\mathbb{R},\ \dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}=$

   Réponse : $\boxed{A)\quad f'(0)}$

   Explication : d'abord calculons $f(0)$ en utilisant la formule $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)(1-f(x)f(y))=f(x)+f(y)$ en remplaçons x et y par 0 , on trouve $f(0)(1-f(0)^2)=2f(0)\Rightarrow f(0)(1-f(0)^2-2)=0$ alors $f(0)=0$ ou $f(0)^2=-1$ (ce qui impossible) donc $f(0)=0$. maintenant dans la formule précédente effuctuions la dérivée par rapport au variable

x : $f'(x+y)(1-f(x)f(y))-f(y)f'(x)f(x+y) = f'(x)$

remplaçons x par 0 on obtient :

$f'(y)(1 - f(0)f(y)) - f(y)f'(0)f(y) = f'(0)$ simplifions : $f'(y) - f(y)^2 f'(0) = f'(0) \Rightarrow f'(y) = f'(0)(1 + f(y)^2)$ d'où : $\dfrac{f'(y)}{(1+f(y)^2)} = f'(0)$

10. **Q10. Pour tout réel** $\alpha > 0$; $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx =$

Réponse : $\boxed{C)\quad 0}$

Explication :

(a) Changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$:

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{-\ln t}{1+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\ln t}{1+t^2}dt.$$

(b) Or, $I(\alpha) = -\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\ln t}{1+t^2}dt = -I(\alpha)$. Ainsi, $2I(\alpha) = 0$, donc $I(\alpha) = 0$.

11. **Q11. La valeur de** I **:**

Réponse : $\boxed{D)\quad \dfrac{\pi^3}{48} - \dfrac{\pi}{8}}$

Explication : On a :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin^2 x + \cos^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx = \frac{\pi^3}{24}.$$

Calcul de $I - J$ par intégration par parties

(a) **Simplification de l'intégrande :**

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\sin^2 x - \cos^2 x)dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(2x)dx$$

(en utilisant $\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos(2x)$).

(b) **Première intégration par parties :**

$$\int x^2\cos(2x)dx = \frac{x^2\sin(2x)}{2} - \int x\sin(2x)dx$$

avec $u = x^2$, $dv = \cos(2x)dx$, donc $du = 2xdx$, $v = \dfrac{\sin(2x)}{2}$.

(c) **Évaluation des bornes :**

$$\left[\frac{x^2\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - 0 = 0$$

(car $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$).

(d) **Seconde intégration par parties :**

$$\int x\sin(2x)dx = -\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

avec $u = x$, $dv = \sin(2x)dx$, donc $du = dx$, $v = -\dfrac{\cos(2x)}{2}$.

(e) **Calcul de l'intégrale définie :**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)dx = \left[-\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

(car $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = \sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$).

(f) **Résultat final pour** $I - J$ **:**

$$I - J = -\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Alors :

- $I + J = \frac{\pi^3}{24}$ (par somme directe)
- $I - J = -\frac{\pi}{4}$ (calculé ci-dessus)

En résolvant le système linéaire :

$$\begin{cases} I + J = \dfrac{\pi^3}{24} \\ I - J = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

on obtient :

$$I = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8} \quad \text{et} \quad J = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}$$

La valeur de I est : $\boxed{\dfrac{\pi^3}{48} - \dfrac{\pi}{8}}$

12. **Q12.** *Calculons* : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{1445}\sin x\,dx.$

Réponse : $\boxed{C)\quad \dfrac{1}{1446}}$

Explication :

(a) Changement de variable $u = \cos x$, $du = -\sin x\,dx$:

$$\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} u^{1445}(-du) = \int_{u=1}^{u=0} -u^{1445}du = \int_0^1 u^{1445}du.$$

(b) Calcul direct :

$$\int_0^1 u^{1445}du = \left.\frac{u^{1446}}{1446}\right|_0^1 = \frac{1}{1446}.$$

13. **Q13.** $\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) =$?

Réponse : $\boxed{B)\quad 4}$

Explication : Soit l'équation quadratique :

$$z^2 - 4iz - 4(1+i) = 0.$$

Par les relations coefficients-racines :

$$z_1 + z_2 = 4i. \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = -4(1+i)$$

avec : $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$, En écrivant $z_k = a_k + ib_k$ $(k = 1, 2)$, on a :

$$(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = 0 + 4i.$$

Par identification :

$$\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) = b_1 + b_2 = 4.$$

14. **Q14. Calcul de** $(1+i)^{2000}$

Réponse : $\boxed{C) \quad 4^{500}}$

Explication :

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4},$$

$$(1+i)^{2000} = 2^{1000} \cdot e^{i\cdot 500\pi} = 2^{1000} \cdot 1 = 4^{500}.t$$

15. **Q15. Calcul de** $\left(\frac{7-15i}{15+7i}\right)^{2023}$

Réponse : $\boxed{A) \quad i}$

Explication :

$$\frac{7-15i}{15+7i} = \frac{(7-15i)(15-7i)}{15^2+7^2} = \frac{-274i}{274} = -i,$$

$$(-i)^{2023} = -i^{2023} = -(-i) = i.$$

16. **Q16. La somme** $(1+e^{\frac{i2\pi}{5}}+e^{\frac{i4\pi}{5}}+e^{\frac{i6\pi}{5}}+e^{\frac{i8\pi}{5}})^{1000} =$

Réponse : $\boxed{A) \quad 0}$

Explication : Ces termes sont les 5 racines 5-ièmes de l'unité, dont la somme est toujours nulle :

$$1 + \sum_{k=1}^{4} e^{\frac{i2k\pi}{5}} = 0.$$

Ainsi :

$$S = 0^{1000} = \boxed{0}.$$

Pourquoi la somme des racines de l'unité est nulle ?

Définition : Les racines n-ièmes de l'unité sont :

$$\omega_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}} \quad (k = 0, \ldots, n-1).$$

Somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \frac{1-r^n}{1-r} \quad \text{avec} \quad r = e^{\frac{i2\pi}{n}}.$$

Comme $r^n = 1$, la somme vaut 0 (si $n \geq 2$).

Interprétation géométrique : Les racines sont des vecteurs symétriques sur le cercle unité, s'annulant deux à deux.

Exemple pour $n = 5$ **:**

$$1 + e^{\frac{i2\pi}{5}} + \cdots + e^{\frac{i8\pi}{5}} = 0.$$

17. **Q17. La solution** $f(x)$ **de l'équation différentielle** $y'' - 7y' + 12y = 0$ vérifiant $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ est

Réponse : $\boxed{C) \quad e^{4x} - e^{3x}}$

Explication :

— Équation caractéristique : $r^2 - 7r + 12 = 0$.

— Racines : $r = 4$ et $r = 3$.

— Solution générale : $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x}$.

Conditions initiales :

— $f(0) = 0$ implique $C_1 + C_2 = 0$ (donc $C_2 = -C_1$).

— $f'(0) = 1$ implique $4C_1 + 3C_2 = 1$.

— En substituant : $C_1 = 1$ et $C_2 = -1$.

Solution particulière :

$$f(x) = e^{4x} - e^{3x}.$$

18. **Q18.**

Réponse : $\boxed{A) \quad \frac{8}{3\sqrt{7}}}$

Explication : La distance d'un point (x_0, y_0, z_0) à un plan $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Calcul de d_A **:**

$$d_A = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 2 + 4|}{\sqrt{6}} = \frac{8}{\sqrt{6}}.$$

Calcul de d_B **:**

$$d_B = \frac{|-3+10-4-5|}{\sqrt{42}} = \frac{2}{\sqrt{42}}.$$

Produit $d_A d_B$ **:**

$$d_A d_B = \frac{8}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{\sqrt{42}} = \frac{16}{6\sqrt{7}} = \frac{8}{3\sqrt{7}}.$$

Réponse : $\boxed{A) \ \frac{8}{3\sqrt{7}}}$.

19. **Q19.**

Réponse : $\boxed{B) \quad \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}}$

Explication : Nous cherchons à calculer l'aire sous la courbe $y = \frac{1}{1+x^2}$ et au-dessus de la parabole $y = \frac{x^2}{2}$.

Trouver les points d'intersection

Nous résolvons l'équation :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}$$

Multiplication par $1+x^2$:

$$1 = \frac{x^2(1+x^2)}{2}$$

$$2 = x^2 + x^4 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$$

Posons $u = x^2$, alors : $u^2 + u - 2 = 0$ Factorisation :

$$(u-1)(u+2) = 0$$

D'où $u = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Calcul de l'aire

L'aire entre les courbes est donnée par :

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx.$$

L'intégrale de $\dfrac{1}{1+x^2}$ est :

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$$

Donc $A = \left[\arctan(x) - \dfrac{x^3}{6} \right]_{-1}^{1}$

$$A = \arctan(1) - \frac{1^3}{6} - \arctan(-1) + \frac{(-1)^3}{6}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Conclusion : La réponse correcte est :

$$\boxed{B. \quad \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}}$$

20. **Q20. La longueur du segment $[AM]$ est égale à**

Réponse : $\boxed{C) \quad 3}$

Explication : Équation du cercle (C) :

$$x^2 + y^2 + x - 3y - 3 = 0.$$

Centre et rayon :

$$\text{Centre } \Omega : \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right),$$

$$\text{Rayon } R = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - (-3)} = \sqrt{\frac{11}{2}}.$$

Distance A à Ω :

$$d(A,\Omega) = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-2-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{29}{2}}.$$

Longueur AM : la droite (AM) tangente au cercle C en M donc le triangle ΩAM rectangle en M , alors $AM^2 + M\Omega^2 = A\Omega^2$ (avec $d(A,\Omega) = A\Omega$ et $M\Omega = R$)

$$AM = \sqrt{d(A,\Omega)^2 - R^2} = \sqrt{\frac{29}{2} - \frac{11}{2}} = 3.$$

Réponse : $\boxed{C)\ 3}$.