programme de mathématiques

Mathématiques

الرياضيات

Cours et exercices

1er année du baccalauréat

Lettres et sciences humaines

اداب و علوم إنسانية

Maths

Prof : Bouyguir Taher

TABLE DES MATIÈRES

Leçon 1 Notions de logique

I Proposition - Fonction propositionnelle 8

II Quantificateurs 8

III Les opérations logiques 9

1 La négation logique 9

2 La conjonction logique ("et" , "∧") 10

3 La disjonction logique ("ou" , " ∨ ") 10

4 L'implication logique ("⟹") 11

5 L'équivalence logique ("⟺") 11

IV Raisonnements mathématiques 12

1 Raisonnement par l'absurde 12

2 Raisonnement par équivalences successives 12

3 Raisonnement par disjonction des cas 13

Leçon 2 Le calcul numérique

I Rappel 16

II Equations de deuxiéme degré à une inconnue 16

III Factorisation - Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ 17

1 Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$ 17

2 Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ 18

IV Systèmes (Méthode de déterminant) 19

Prof : Bouyguir Taher

V Proportionnalité - Pourcentage - Echelle 20
1 Pourcentage 20
2 Proportionnalité 20
3 Echelle 20
VI Exercices 21

Leçon 3 Généralités sur les fonctions numériques

I Rappel 24
1 Définition d'une fonction numérique 24
2 Domaine de définition d'une fonction numérique 24
II Fonction paire - Fonction impaire 25
III Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée 26
IV Comparaisons de deux fonctions 27
1 Egalité de deux fonctions 27
2 Inégalité de deux fonctions 27
V Monotonie d'une fonction numérique 29
1 Taux de variation d'une fonction numérique 29
VI Les extrêmums d'une fonction numérique 30

Leçon 4 Les suites numériques

I Les suites numériques 32
II Les suites arithmétiques 32

III Les suites géométriques 34

IV Exercices 35

Leçon 5 Dénombrement

I Principe général de dénombrement 38

II Le arrangements 38

III Les permutations 39

IV Les combinaisons 39

V Exercices 41

Leçon 6 Les limites

I Limites des fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^3$ et limites de leurs inverses en 0, $+\infty$ et $-\infty$ 44

1 **Limites des fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^3$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$** 44

2 **Limites des fonctions $x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$, $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$** 45

II Limite à gauche - Limite à droite 45

III Les opérations sur les limites 46

1 **La limite et la somme** 46

2 **La limite et la multiplication** 46

3 **Limite et le quotient** 46

IV Limite d'une fonction polynômiale et d'une fonction rationnelle 47

Leçon 7 La dérivabilité

I Dérivabilité en un point 50

1 Le nombre dérivé 50

2 Interprétation géométrique de nombre dérivé 50

II Fonctions dérivées 51

1 Dérivabilité sur un intervalle 51

2 La fonction dérivée 51

3 Dérivation des fonctions $x \longmapsto a$, $x \longmapsto ax$, $x \longmapsto x^n$ 51

4 Les opérations sur les fonctions dérivées 51

III Applications de la fonction dérivée 52

1 Monotonie d'une fonction et le signe de sa dérivée 52

2 Les extrêmums d'une fonction dérivable 52

Leçon 8 Etude et représentation d'une fonction

I Asymptote horizontale - Asymptote verticale 54

II Etude et représentation de la fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ 54

III Etude et représentation de la fonction . $x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ 55

IV Etude et représentation de la fonction $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$. $(ad - bc \neq 0)$ 56

V Examens régionaux 57

Leçon 1

Notions de logique

Objectifs

- Utiliser le raisonnement convenable selon la situation étudiée.
- Rédiger des raisonnements mathématiques et des démonstrations claires et logiquement correctes.
- Etudier la vérité d'une proposition logique.
- Comprendre le sens d'une proposition logique et donner sa négation

I Proposition - Fonction propositionnelle 8

II Quantificateurs 8

III Les opérations logiques 9

1 La négation logique 9

2 La conjonction logique ("et" , "∧") 10

3 La disjonction logique ("ou" , " ∨ ") 10

4 L'implication logique ("⟹") 11

5 L'équivalence logique ("⟺") 11

IV Raisonnements mathématiques 12

1 Raisonnement par l'absurde 12

2 Raisonnement par équivalences succéssives 12

3 Raisonnement par disjonction des cas 13

Prof : Bouyguir Taher

I Proposition - Fonction propositionnelle

Définition 1

Une proposition est une phrase mathématique qui est soit vraie soit fausse, pas les deux en m*ê*me temps.

Example 1

1. P : "$6 \times 3 = 18$" est une proposition vraie.
2. P : "$3 - 1 = 9$" est une proposition fausse.
3. P : "4 est un nombre pair" est une proposition vraie

Définition 2

Une fonction propositionnelle est une expression mathématique de la forme "$x \in E \quad P(x)$" où E est un ensemble connu et x est une variable de E. Elle devient une proposition chaque fois qu'on remplace la variable x par une valeur.

Example 2

"$x \in \mathbb{R} \qquad x^2 = 1$" est une fonction propositionnelle.
Pour $x = 1$ on a "$1^2 = 1$" est une proposition vraie.
Pour $x = 2$ on a "$2^2 = 1$" est une proposition fausse.

II Quantificateurs

Définition 3

Soit "$x \in E \quad P(x)$" une fonction propositionnelle.

1. Si P(x) est vraie pour tout $x \in E$
   alors on dit que "Quel que soit x de E tel que P(x) est vraie" et on écrit : "$\forall x \in E \quad P(x)$"
2. Si P(x) est vraie pour au moins un $x \in E$
   alors on dit que "Il existe au moins un x de E tel que P(x) est vraie " et on écrit : "
   " $\exists x \in E \quad P(x)$".

Example 3

1. P(x) : "$x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$" est une fonction propositionnelle.
   - on sait que $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - donc P(x) est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - donc "$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$" est une proposition vraie.
2. P(x) : "$x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4$" est une fonction propositionnelle, ona :
   - "$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4$" est une proposition fausse.
   - "$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4$" est une proposition vraie.
   - "$\exists! x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4$" est une proposition fausse.
3. P(x) : "$x \in \mathbb{R} \quad x + 1 = 0$" est une fonction propositionnelle, on a :
   - "$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + 1 = 0$" est une proposition fausse.
   - "$\exists x \in \mathbb{R} \quad x + 1 = 0$" est une proposition vraie.
   - "$\exists! x \in \mathbb{R} \quad x + 1 = 0$" est une proposition vraie.

Remarque 1

L'ordre des quantificateurs de type différents est trés important.

Example 4

1. "$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y = 10$" est vraie.
2. "$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y = 10$" est fausse.

Application 1

Ecrire -En utilisant les quantificateurs- les propositions suivantes :

1. *Le carré de tout nombre réel est toujours positif.*
2. *L'équation* $5x - 3 = 0$ *admet une unique solution dans* $\mathbb{R}$.
3. *Il existe au moins un nombre réel* x *tel que* $2x > 1$.

III Les opérations logiques

1 La négation logique

Définition 4

La négation logique d'une proposition P est une proposition qu'on la note par $\overline{P}$ ou $\neg P$ et on a la table de vérité suivante :

P	0	1
$\overline{P}$	1	0

Example 5

1. P : "$\forall x \in \mathbb{R} \quad x+1=2$".
   $\overline{P}$: "$\exists x \in \mathbb{R} \quad x+1 \neq 2$".
2. P : "$\exists x \in \mathbb{Z} \quad x<0$".
   $\overline{P}$: "$\forall x \in \mathbb{Z} \quad x \geq 0$".
3. P : "$\forall x \leq 0 \quad \exists y \leq 0 \quad xy \in \mathbb{R}_+$".
   $\overline{P}$: "$\exists x \leq 0 \quad \forall y \leq 0 \quad xy \notin \mathbb{R}_+$".

2 La conjonction logique ("et" , "$\wedge$")

Définition 5

La conjonction logique entre deux propositions P et Q est une proposition qu'on la note par "P et Q" ou "$P \wedge Q$" et on a la table de vérité suivante :

P	1	0	1	0
Q	1	1	0	0
P et Q	1	0	0	0

Example 6

1. P : "$3 \geq 1 \quad et \quad (-2)^2 = 4$" est vraie.
2. P : "$-3 \in \mathbb{Z} \quad et \quad \forall x \in \mathbb{R}\ x<0$" est fausse.

3 La disjonction logique ("ou" , "$\vee$")

Définition 6

La disjonction logique entre deux propositions P et Q est une proposition qu'on la note par "P ou Q" ou "$P \vee Q$" et on a la table de vérité suivante :

P	1	0	1	0
Q	1	1	0	0
P ou Q	1	1	1	0

Example 7

1. P : "$5=0 \quad ou \quad \frac{3}{2}=1.5$" est vraie.
2. P : "13 est un nombre pair ou $6 \times 0 = 60$" est fausse.

4 L'implication logique ("$\Longrightarrow$")

Définition 7

La proposition "$\overline{P}$ ou Q" s'appelle l'implication logique des propositions P et Q, on la note par "$P \Rightarrow Q$" et on a la table de vérité suivante :

P	1	0	1	0
Q	1	1	0	0
$P \Longrightarrow Q$	1	1	0	1

Example 8

1. P : "3 est un nombre impair $\Longrightarrow$ $8 = 0$" est fausse.
2. P : "$2^2 = -4$ $\Longrightarrow$ $8 = 0$" est vraie.
3. P : "$x = 3$ $\Longrightarrow$ $2x + 2 = 8$" est vraie.

5 L'équivalence logique ("$\Longleftrightarrow$")

Définition 8

L'équivalence logique entre deux propositions P et Q est la proposition "$P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$" qu'on la note par "$P \Longleftrightarrow Q$" et on a la table de vérité suivante :

P	1	0	1	0
Q	1	1	0	0
$P \Longleftrightarrow Q$	1	0	0	1

Example 9

1. P : "$3 \in \mathbb{N}$ $\Longleftrightarrow$ $7 \geq 5$ " est vraie.
2. P : "$x = 5$ $\Longleftrightarrow$ $x^2 = 25$" est fausse.
3. P : "$x^2 = 49$ $\Longleftrightarrow$ $x = -7$ *ou* $x = 7$" est vraie.

Exercice 1

Donner la vérité et la négation des propositions suivantes :

P_1 : " $\sqrt{4} = -2$ *et* $4^2 = 8$ ".
P_2 : " $3 < 1$ *et* $3 \times 3 = 9$ ".
P_3 : " $5 \times 1 = 5$ *ou* $3 \in \mathbb{N}$ ".
P_4 : " $8 + 1 = 20$ *ou* $5 - 2 = 11$ ".

P_5 : " $\exists x \in \mathbb{R}$ $3x - 5 = 0$ ".
P_6 : " $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 < 0$ ".
P_7 : " $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $xy \geq 0$ ".
P_8 : " $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\forall y \in \mathbb{R}_+$ $xy \in \mathbb{R}_+$ ".

IV Raisonnements mathématiques

1 Raisonnement par l'absurde

Example 10

Montrons par l'absurde que $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$.

supposons que $\frac{3}{2} \in \mathbb{N}$.

donc, il existe un nombre entier naturel tel que $\frac{3}{2} = n$.

où encore $3 = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

donc 3 est un nombre pair.

contradiction, car 3 est un nombre impair.

donc $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$.

Application 2

Montrer par l'absurde que : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad x \neq -x$.

2 Raisonnement par équivalences succéssives

Example 11

Soient a et b deux nombres réels. Montrons que $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

on a :

$$a^2 + b^2 \geq 2ab \iff a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$
$$\iff (a-b)^2 \geq 0$$

donc $a^2 + b^2 \geq 2ab \iff (a-b)^2 \geq 0$

puisque " $(a-b)^2 \geq 0$ " est vraie.

alors " $a^2 + b^2 \geq 2ab$ " est vraie.

Application 3

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{x^2+1}{2} \geq x$

3 Raisonnement par disjonction des cas

Example 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x|-1=4$

Rappel :(valeur absolue)

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

1er cas $(x \geq 0)$ **:** $(|x| = x)$

$$\begin{aligned} |x|-1=4 &\iff x-1=4 \\ &\iff x=5 \end{aligned}$$

2e cas$(x \leq 0)$ **:** $(|x| = -x)$

$$\begin{aligned} |x|-1=4 &\iff -x-1=4 \\ &\iff x=-5 \end{aligned}$$

donc $S=\{-5,5\}$

Application 4

1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $|x-3|=2$.
2. *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}$ $n(n+1)$ *est un nombre pair*

Leçon 2

Le calcul numérique

Objectifs

- Utiliser la proportionnalité pour traiter des situations variées.
- Résoudre des équations et des inéquations se ramenant à la résolutions d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue.
- Résoudre des systèmes du premier degré à deux inconnues par les différentes méthodes étudiées.
- Mathématiser des situations faisant intervenir des quantités variables, se ramenant à la résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes.

I Rappel 16

II Equations de deuxiéme degré à une inconnue 16

III Factorisation - Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ 17

1 Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$ 17

2 Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ 18

IV Systèmes (Méthode de déterminant) 19

V Proportionnalité - Pourcentage - Echelle 20

1 Pourcentage 20

2 Proportionnalité 20

3 Echelle 20

VI Exercices 21

Prof : Bouyguir Taher

I Rappel

Example 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x+4=0$.
2) $3x-9=6$.
3) $-2x+3=-1$.
4) $14x=0$.
5) $(x-1)(x+2)=0$.
6) $(x+4)(3x-9)=0$.

Example 2

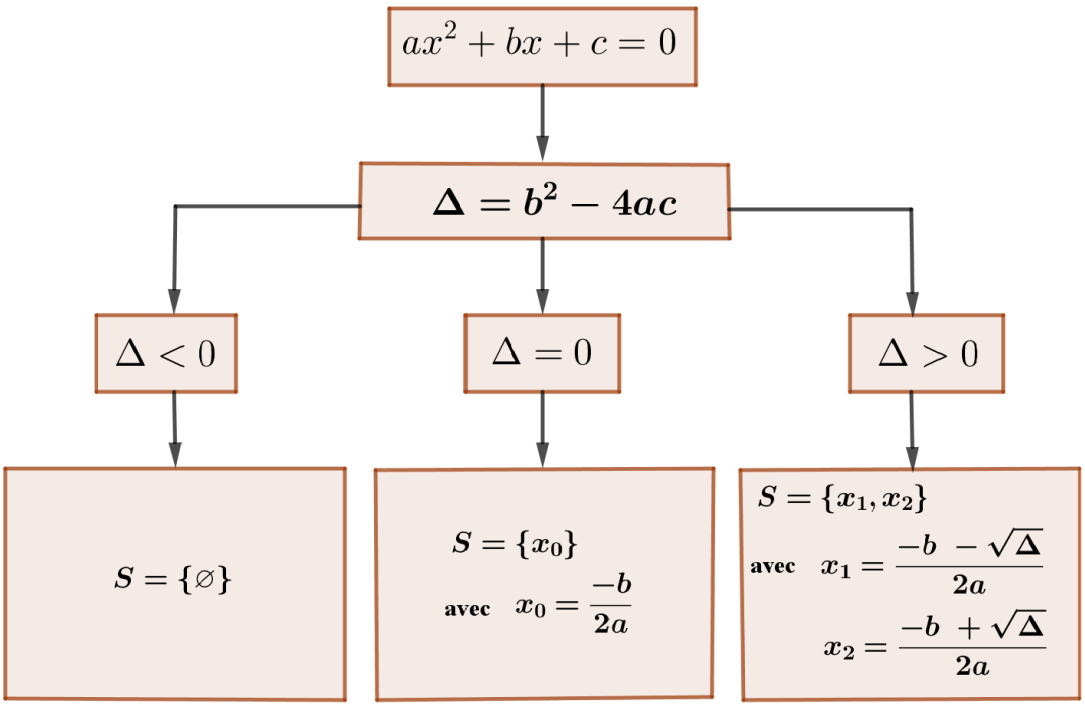
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $3x+7\geq 0$.
2) $-2x+4<0$.
3) $(x-1)(x+2)\leq 0$.
4) $(2x-1)(x-3)>0$.

II Equations de deuxiéme degré à une inconnue

Définition 1

On appelle équation de 2e degré à une inconnue toute équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ où l'inconnue est x et a, b et c trois nobres réels.
Le nobre réel $\Delta=b^2-4ac$ s'appelle le discriminant de cette équation.



Example 3

On résout dans $\mathbb{R}$ les équations suivanes :

1) $x^2 + 2x - 3 = 0$.

2) $x^2 + x + 1 = 0$.

3) $2x^2 + 4x + 2 = 0$.

Exercice 1

1) $-2x^2 + 2x - 1 = 0$
2) $3x^2 - 4x + 3 = 0$
3) $x^2 - 5x + 1 = 3x - 1$
4) $x^2 + x - 2 = 0$
5) $x^2 + 6x - 9 = 0$
6) $2x^2 + 3x - 2 = 0$
7) $x^2 - 2x + 1 = 0$
8) $x^2 + 5x + 6 = 0$

III Factorisation - Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

1 Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
P(x) n'admet pas de factorisation dans $\mathbb{R}$	$P(x) = a(x - x_0)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Example 4

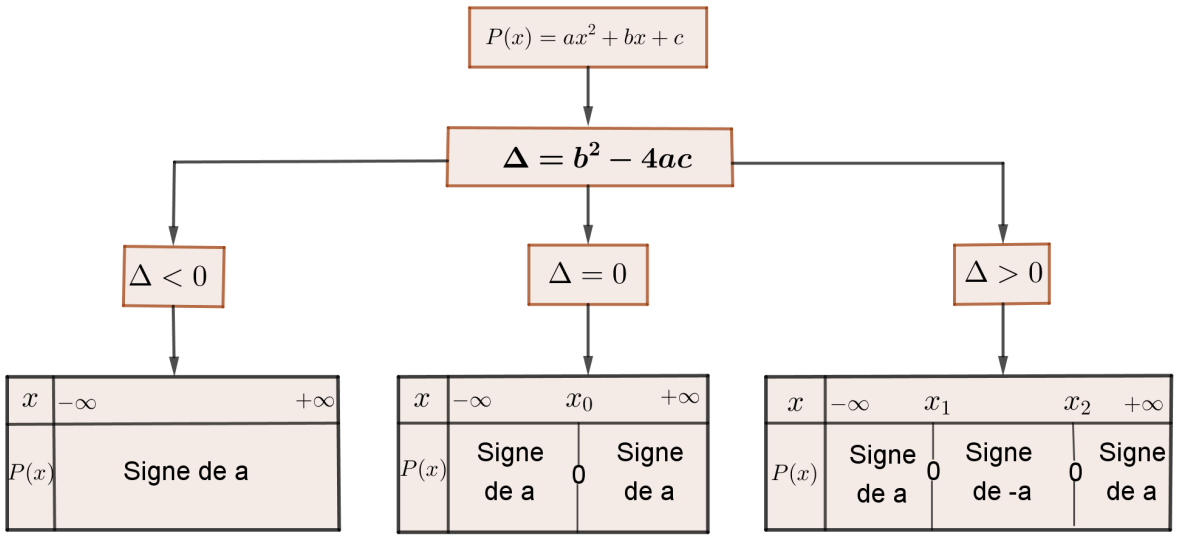
Factorisons dans $\mathbb{R}$ les trinômes suivants :

1) $x^2 + 2x + 1$.

2) $x^2 + x - 30$.

3) $3x^2 + x + 1$.

2 Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$



Example 5

On résout dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $x^2 + 2x + 1 > 0$.

2) $x^2 + x - 30 < 0$.

3) $3x^2 + x + 1 \geq 0$.

Application 1

1. *résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $x^2 + 3x - 10 = 0$.
2. *Factoriser dans* $\mathbb{R}$ *le trinôme* $x^2 + 3x - 10$.
3. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $x^2 + 3x - 10 \geq 0$.

Exercice 2

1. *résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $-2x^2 + x + 1 = 0$.
2. *Factoriser dans* $\mathbb{R}$ *le trinôme* $2x^2 + x + 1$.
3. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $2x^2 + x + 1 > 0$.

IV Systèmes (Méthode de déterminant)

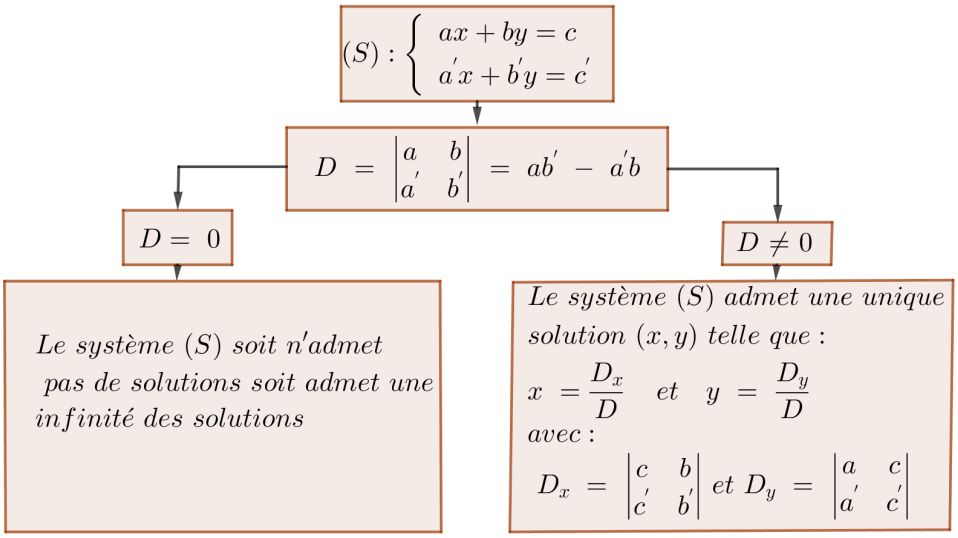
Définition 2

On considére le système suivant :

$$(S):\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels.

Le nombre réel $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$ s'appelle le déterminant du système (S).



Example 6

On résout dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 3x+y=10 \\ 5x-2y=2 \end{cases}$ || 2) $\begin{cases} 4x-y=3 \\ 3x+2y=-5 \end{cases}$

Application 2

1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $2x^2-x-1=0$.
2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $2x^2-x-1<0$.
3. *Résoudre dans* $\mathbb{R}^2$ *les systèmes suivants :*

1) $\begin{cases} 5x+2y=-4 \\ 7x-6y=5 \end{cases}$ || *2)* $\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=7 \end{cases}$

V Proportionnalité - Pourcentage - Echelle

1 Pourcentage

Example 7

Une classe formée par 48 éleves dont le nombre des filles est 36. Quel est le pourcentage des filles et des garçons dans cette classe?

Application 3

1. *Une classe constituée de 40 éleves dont le nombre des filles est 16. Quel est le pourcentage des garçons et des filles dans cette classe?*
2. *Un lycée contient 1720 éleves, le pourcentage des éleves de tronc commun est 20%. Quel est le nombre des éleves de tronc commun?*

2 Proportionnalité

Example 8

1. Le prix d'un vélo est 350 DH. Quel est leur prix aprés une réduction de 15%?
2. Le prix d'un sac avec la réduction de 30% est 140 DH. Quel est leur prix avant la réduction?

Example 9

1. Le prix d'un livre est 250 DH. Quel est leur prix aprés une augmentation de 5%?
2. Le prix d'une porte avec l'augmentation de 20% est 600 DH. Quel est leur prix avant l'augmentation?

Application 4

Le prix initial d'un ordinateur est 6465 DH. Sachant que le pourcentage de TVA est 20%, calculer le nouveau prix de cet ordinateur.

3 Echelle

Example 10

1. La distance entre deux villes sur la carte est 6.5cm et distance entre eux dans la réalité est 1300 Km. Déterminer l'échelle de cette carte
2. On considére une carte d'échelle $\frac{1}{250}$.
   (a). La distance entre deux villes A et B dans la réalité est 3500 Km. Déterminer la distance entre eux sur la carte.
   (b). La distance entre deux villes C et D sur la carte est 4.5cm. Déterminer la distance entre eux dans la réalité.

VI Exercices

Le calcul numérique

1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 12x + 35 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2 - 12x + 35 \leq 0$.

2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x + y = 260 \\ x - \frac{1}{4}y = 0 \end{cases}$
2. Le périmètre d'un champ rectangulaire est 520 m et sa largeur est égale à 25% de sa longueur. Calculer les dimensions de ce champ.

3

1. (a). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + 6x + 8 = 0$.
   (b). En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation : $x^2 + 6x + 8 \geq 0$.
2. Une entreprise agricole contient 70 femmes employées, représentant 40% de la totalité des travailleurs dans cette entreprise. Déterminer le nombre total des travailleurs dans cette entrprise.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

4

1. Le nombres de filles et de garçons dans un établissement scolaire est 1640. Calculer le nombre des garçons et des filles dans cet établissement sachant que le pourcentage des filles est 35%.
2. Soit dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2x^2 + 7x + 5 = 0$.
   (a). Vérifier que le discriminant de cette équation est : $\Delta = 9$.
   (b). En déduire les deux solutions de cette équation.
   (c). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $2x^2 + 7x + 5 \leq 0$.
3. (a). Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x + y = 38 \\ x + 2y = 55 \end{cases}$
   (b). Un immeuble comprend 38 appartements de deux catégories : des appartements de deux pièces et des appartement de quatre pièces. Déterminer le nombre d'appartement de chaque catégorie, si on sait que le nombretotal de pièces dans cet immeuble est 110.

Leçon 3

Généralités sur les fonctions numériques

Objectifs

- Comparer deux expressions en utilisant des différentes techniques.
- Déduire les variations d'une fonction ou ses valeurs maximales et minimales à partir de sa représentation graphique ou de son tableau de variations.
- Lier la lecture et l'interprétation de certaines représentations graphiques à certaines propriétés des fonctions

I Rappel 24
1 Définition d'une fonction numérique 24
2 Domaine de définition d'une fonction numérique 24
II Fonction paire - Fonction impaire 25
III Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée 26
IV Comparaisons de deux fonctions 27
1 Egalité de deux fonctions 27
2 Inégalité de deux fonctions 27
V Monotonie d'une fonction numérique 29
1 Taux de variation d'une fonction numérique 29
VI Les extrêmums d'une fonction numérique 30

Prof : Bouyguir Taher

I Rappel

1 Définition d'une fonction numérique

Définition 1

On appelle fonction numérique toute relation d'une partie E de $\mathbb{R}$ vers une partie F de $\mathbb{R}$ tel que chaque élement x de E a au plus une image dans F, on la note souvent par f ou g et on écrit :
$f(x) = y$
$x \in E$: s'appelle l'antécédent de y par f.
$y \in F$: s'appelle l'image de x par f.

Example 1

1. On considére la fonction numérique définie par : $f(x) = 2x - 1$.
   Calculons f(0), f($\frac{1}{2}$), f($\frac{-1}{2}$), f(1), f($\sqrt{2}$) et f(-2).
2. On considére la fonction numérique : $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.
   Calculons s-elles existent l'image de 0, 2, 1 par f.

2 Domaine de définition d'une fonction numérique

Définition 2

Soit f une fonction numérique. Le domaine de définition de f est l'ensemble des nombres réels qu'on peut calculer leurs images par f, on le note par D_f et on a :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Example 2

Déterminons le domaine de définition D_f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = 2x + 1$
2) $f(x) = x^2 + 2x$
3) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$
4) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x + 7$

Exercice 1

Déterminer D_f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = x^2 + 1$
2) $f(x) = \dfrac{x-9}{x-3}$
3) $f(x) = -2x^3 + x^2 + 14x - 5$
4) $f(x) = x - 1$

II Fonction paire - Fonction impaire

Définition 3

Soit f une fonction numérique et D_f sont domaine de définition.
On dit que f est paire si et seulement si :

1. $-x \in D_f, \forall x \in D_f$
2. $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$

Example 3

Montrons que f est paire dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = 3x^2 - 7$

Définition 4

Soit f une fonction numérique et D_f sont domaine de définition.
On dit que f est impaire si et seulement si :

1. $-x \in D_f, \forall x \in D_f$
2. $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$

Example 4

Montrons que f est impaire dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x^3$
2. $f(x) = x^3 - x$

Propriété 1

Soit f une fonction numérique et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repére $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. f est paire si et seulement si $(\mathscr{C}_f)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(O, \vec{j})$.
2. f est impaire si et seulement si $(\mathscr{C}_f)$ est symétrique par rapport à l'origine de repére O(0,0)

III Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée

Définition 5

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.
Soient M et m deux nombres réels.

1. On dit que f est majorée sur I par M si :

$$f(x) \leq M \qquad \forall x \in I$$

2. On dit que f est minorée par m sur I si :

$$f(x) \geq m \qquad \forall x \in I$$

3. On dit que f est bornée sur I si f est à la fois majorée et minorée sur I, c'est-à-dire :

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in I$$

Example 5

1. Montrons que $f(x) = x^2 + 1$ est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrons que $f(x) = -2x^2 + 4$ est majorée par 4 sur $\mathbb{R}$.
3. Montrons que $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Application 1

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

1. *Déterminer D_f.*
2. *Montrer que $f(x) = (x+1)^2 + 2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.*
3. *Montrer que f est minorée par 2.*

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 7$$

1. *Déterminer D_f.*
2. *Montrer que $f(x) = -2(x-1)^2 + 9 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.*
3. *Montrer que f est majorée par 9.*

IV Comparaisons de deux fonctions

1 Egalité de deux fonctions

Définition 6

Soient f et g deux fonctions numériques. On dit que f et g sont égales si et seulement si :

$$\begin{cases} 1) & D_f = D_g \\ 2) & f(x) = g(x) \qquad \forall x \in D_f \end{cases}$$

et on écrit $f = g$.

Example 6

Montrons que f et g sont égales dans chacun des cas suivant :

1. $f(x) = (x+2)^2 + 5$ et $g(x) = x^2 + 4x + 9$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

2 Inégalité de deux fonctions

Définition 7

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.
On dit que f est supérieurs ou égale à g sur I si :

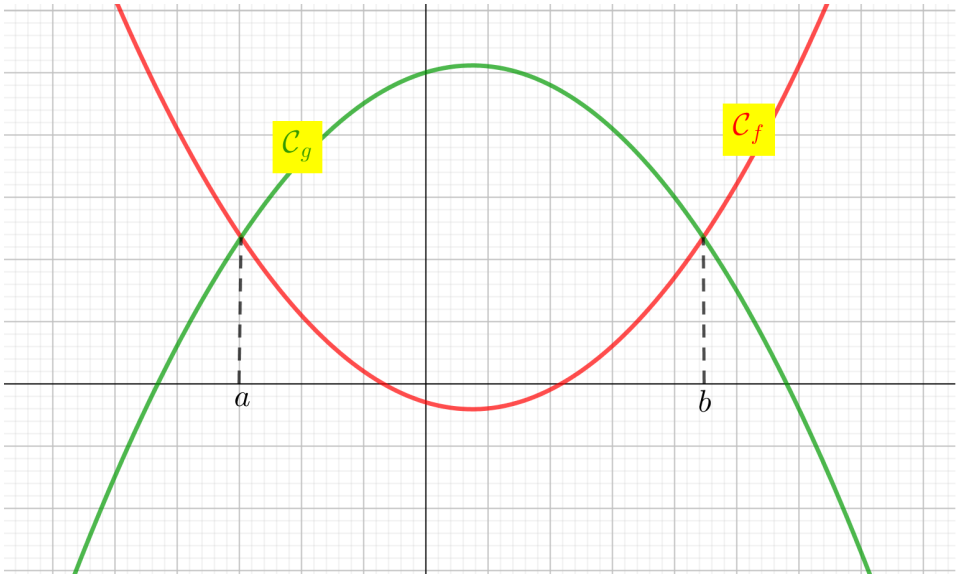
$$f(x) \geq g(x) \qquad \forall x \in I$$

et on écrit $f \geq g$

Example 7

Soient $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 3x + 4$.
Comparons f et g.

Interprétation géométrique :



- Sur l'intervalle $]-\infty;a]$:
  C_g se trouve en-dessous de C_f
  donc $g \leq f$ *sur* $]-\infty;a]$
- Sur l'intervalle $[a;b]$:
  C_g se trouve au-dessus de C_f
  donc $g \geq f$ *sur* $[a:b]$
- Sur l'intervalle $[b;+\infty[$:
  C_g se trouve en-dessous de C_f
  donc $g \leq f$ *sur* $[b;+\infty[$

Application 2

On considére les fonctions f et g telles que :

$$f(x) = x^2 \qquad et \qquad g(x) = 2x - 1$$

Comparer f et g.

Exercice 3

On considére les fonctions f et g telles que :

$$f(x) = x^2 \qquad et \qquad g(x) = 2x + 3$$

Comparer f et g.

V Monotonie d'une fonction numérique

Définition 8

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I :

1. On dit que f est croissante sur I si : $\forall x, y \in I \quad x < y \implies f(x) \leq f(y)$
2. On dit que f est décroissante sur I si : $\forall x, y \in I \quad x < y \implies f(x) \geq f(y)$
3. On dit que f est constante sur I si : $\forall x, y \in I \quad f(x) = f(y)$

Example 8

Etudions la monotonie de f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 2x + 1$.
2. $f(x) = -3x + 5$

1 Taux de variation d'une fonction numérique

Définition 9

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soient $x, y \in I$ tels que $x \neq y$.
Le nombre réel $Tf(x, y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ s'appelle le taux de variation de f entre x et y.

Propriété 2

1. Si $Tf(x, y) \geq 0$ alors f est croissant sur I.
2. Si $Tf(x, y) \leq 0$ alors f est décroissante sur I.
3. Si $Tf(x, y) = 0$ alors f est constante sur I.

Example 9

Etudions -En utilisant le taux de variation- la monotonie de f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 2x - 1$.
2. $f(x) = x^2$ (sur $]-\infty; 0]$ et $[0; +\infty[$)

VI Les extrêmums d'une fonction numérique

Définition 10

Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I et $a \in I$.

1. On dit que f(a) est une valeur maximale de f sur I si :

$$f(x) \leq f(a) \qquad \forall x \in I$$

2. On dit que f(a) est une valeur minimale de f sur I si :

$$f(x) \geq f(a) \qquad \forall x \in I$$

3. On dit que f(a) est extrêmum de f sur I si f(a) est une valeur minimale ou maximale de f sur I

Example 10

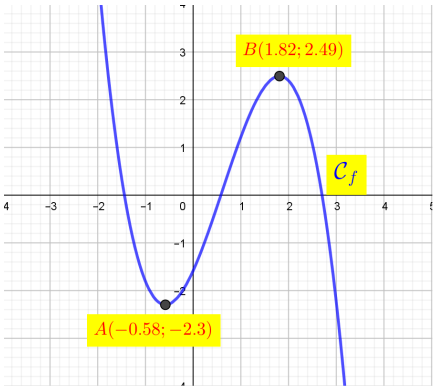
1. Soit $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
   Montrons que 1 est une valeur minimale de f
2. Soit $f(x) = -x^2 + 5$.
   Montrons que 5 est une valeur maximale de f.

Exercice 4

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = (x+1)^2 - 2$.

1. *Déterminer* D_f.
2. *Montrer que* $g(x) \geq -2 \qquad \forall x \in D_g$.
3. *Résoudre dans* D_g *l'équation* $g(x) = -2$.
4. *Que-peut-on déduire ?.*

Exercice 5



x	$-\infty$		1		$+\infty$
g		↗	3	↘	

En utilisant la figure, déduire les variations et les extrêmes de f et g.

Leçon 4

Les suites numériques

Objectifs

- Reconnaitre une suite arithmétique ou géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
- Calculer la somme de n termes conséqutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Utiliser les suites arithmétiques et les suites géométriques pour résoudre des problémes variés

I Les suites numériques 32

II Les suites arithmétiques 32

III Les suites géométriques 34

IV Exercices 35

Prof : Bouyguir Taher

I Les suites numériques

Définition 1

- Une suite numérique est une fonction numérique d'une partie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, on la note souvent par $(U)_{n\in\mathbb{N}}$.
- U_0 s'appelle le premier terme de la suite $(U)_{n\in\mathbb{N}}$.
- U_n s'appelle le terme général de la suite $(U)_{n\in\mathbb{N}}$.

Example 1

1. On considére la suite numérique $(U)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_n = 2n-3$.
   Calculons U_0, U_{10}, et U_{15} puis déterminons le 1er terme.
2. On considére la suite numérique $(U)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = \dfrac{1}{n}$.
   Calculons U_1, U_7, et U_{12} puis déterminons le 1er terme.
3. On considére la suite numérique $(U)_{n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}}$ définie par : $U_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n-1}$.
   Calculons U_2, U_8, et U_{19} puis déterminons le 1er terme.

II Les suites arithmétiques

Définition d'une suite arithmétique :

Soit $(U)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que $(U)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ si :

$$U_{n+1} - U_n = r \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Le terme général d'une suite arithmétique :

Soit $(U)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de terme U_p, on a :

$$U_n = U_p + (n-p)\times r \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

Soit $(U)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique, on a :

$$U_p + U_{p+1} + \ldots + U_n = (U_p + U_n) \times \frac{n-p+1}{2}$$

Example 2

Montrons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dans chacun des cas suivants :

1. $U_n = 3n+5 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $U_n = -\frac{1}{2}n - 4 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Application 1

Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison et son 1^{er} terme dans chacun des cas suivants :

1. $U_n = 5n+2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. $U_n = -n-3 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Example 3

Déterminons U_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

1. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite arithmétique de raison $r = 2$ et de 1^{er} terme $U_0 = 3$.
2. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite arithmétique de raison $r = 6$ et de 1^{er} terme $U_1 = 2$.

Application 2

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r telle que : $U_0 = 6$ et $U_{20} = 46$.

1. *Vérifier que $r = 2$.*
2. *Calculer U_5, U_7 et U_{10}.*
3. *Déterminer U_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
4. *Vérifier que 2018 est un terme de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Example 4

1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique définie par : $U_n = n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   Calculons la somme $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_{20}$.
2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique définie par : $U_n = 2n+3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   Calculons la somme $S' = U_1 + U_2 + \ldots + U_{10}$.

Application 3

On considére la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_n = -3n + \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. *Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison et son premier terme*
2. *Ecrire U_n en fonction de n.*
3. *Calculer U_3, U_5 et U_{15}.*
4. *Calculer la somme $S = U_1 + \ldots + U_{15}$.*

Exercice 1

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que : $U_0 = 5$ et $U_8 + U_{10} = 64$.

1. *Déterminer r.*

2. *Déterminer U_n en fonction de n.*
3. *Calculer U_1, U_5 et U_{100}.*
4. *Calculer les sommes suivantes :*
   (a). $S = U_0 + U_1 + \ldots + U_{10}$.
   (b). $S' = U_1 + U_2 + \ldots + U_{15}$.

III Les suites géométriques

Définition d'une suite géométrique :

Soit $(U)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que $(U)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ si :

$$U_{n+1} = qU_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Le terme général d'une suite géométrique :

Soit $(U)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de terme U_p, on a :

$$U_n = U_p \times q^{n-p} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

Soit $(U)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q, on a :

$$U_p + U_{p+1} + \ldots + U_n = U_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$$

Example 5

Montrons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique en déterminant sa raison et son 1er terme dans chacun des cas suivants :

1. $U_n = 2^n$.
2. $U_n = 3 \times 5^{n+1}$.

Application 4

Montrons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dans chacun des cas suivants :

1. $U_n = 3^n$.
2. $U_n = 2 \times 7^n$.
3. $U_n = 5 \times 2^{n+2}$.

Example 6

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $U_0 = 2$.

1. Caculer U_1, U_5 et U_6.
2. Ecrire U_n en fonction de n

Example 7

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$ et de 1er terme $U_0=1$.
Caculons les sommes suivantes :

$S = U_0+U_1+\ldots+U_{10}$.

$S' = U_5+U_6+\ldots+U_{20}$.

Application 5

Sit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q positif tel que : $U_0=1$ et $U_2=4$

1. *Déterminer q.*
2. *Ecrire U_n en fonction de n.*
3. *Calculer U_5 et U_7.*
4. *Caculer les sommes suivantes :*

   $S = U_0+U_1+\ldots+U_{10}$.

   $S' = U_5+U_6+\ldots+U_{15}$.

IV Exercices

Les suites numériques

5

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r=10$ et $U_0=-100$.

1. Calculer U_1 et U_{20}.
2. Calculer la somme suivante :
   $S=U_0+U_1+\ldots+U_{20}$.

6

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique tel que $U_1=-2$ et $U_2=3$.

1. Vérifier que la raison de cette suite est : $r=5$.
2. Calculer U_0 et vérifier que : $U_{17}=78$.
3. Caculer la somme suivantes :
   $S=U_1+U_2+\ldots+U_{17}$.

7

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique tel que : $U_5=-7$ et $U_8=2$, et soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $V_n=25\times\left(\dfrac{5}{3}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

1. (a). Vérifier que la raison de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : $r=3$.
   (b). Calculer :
   $S_1=U_0+U_1+\ldots+U_6$.
2. (a). Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{5}{3}$.
   (b). Calculer la somme suivante :
   $S_2=V_0+V_1+\ldots+V_6$.

Leçon 5

Dénombrement

Objectifs

- Utiliser l'arbre des choix dans des situations de dénombrement.
- appliquer le dénombrement pour résoudre des problémes variés.

I Principe général de dénombrement 38

II Le arrangements 38

III Les permutations 39

IV Les combinaisons 39

V Exercices 41

Prof : Bouyguir Taher

I Principe général de dénombrement

Définition 1

On considére trois choix.
si :

- Le premier choix se fait par n maniéres différentes.
- Le deuxiéme choix se fait par p maniéres différentes.
- Le troisiéme choix se fait par q maniéres différentes.

alors :

- Le nombre total des possibilités est $n \times p \times q$.

Example 1

On veut faire un groupe de trois personnes (Directeur - professeur - éleve).
Calculer le nombre des groupes possibles dans chacun des cas suivants :

1.
   - Le directeur est choisi parmi deux personnes A et B.
   - Le professeur est choisi parmi trois personnes C, D et E.
   - L'éleve est chosi parmi deux personnes F et G.
2.
   - Le directeur est choisi parmi 11 personnes.
   - Le professeur est choisi parmi 10 personnes.
   - L'éleve est chosi parmi 8 personnes

II Le arrangements

Définition 2

Soient P et n deux nombres entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$.
Tout classement (ordre) de p élements choisis parmi n élements s'appelle arrangement de p élements parmi n élements.
Le nombre des arrangements de p élements parmi n élements est noté A_n^p, et on a :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

Example 2

1. Calculons A_5^1, A_3^3, A_{30}^2, A_{10}^3, A_7^0 et A_8^4.
2. On considére les chiffres suivants : 2, 3, 4, 5, 6.
   (a). Combient de nombres peut-on former à partir de trois chiffres - parmi 2, 3, 4, 5, 6 - différents deux à duex?
   (b). Combient de nombres parmi ces nombres est inférieur à 400?
   (c). Combient de nombres parmi ces nombres est pair?
   (d). Combient de nombres parmi ces nombres est impair?

III Les permutations

Définition 3

Soit n un nombre entier naturel non nul.
Tout arrangement de n élemnts parmi n élements s'appelle permutation de n élements. Le nombre des permutations de n élements est A_n^n et on le note par $n!$ (se lit n factoriel) et on a : $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$.

Example 3

1. Calculons 5!, 4!, 2!, 1! et 0!.
2. Combient de nombres peut-on former à partir de 4 chiffres - 1, 3, 5, 9 - différents deux-à-deux?
3. De combient de façons 10 éleves peuvent-ils s'asseoir sur 10 chaises numérotés de 1 à 10?
4. De combient de façons ces éleves peuvent-ils s'asseoir si nous savons que l'éleve E_1 est assis au premier chaise?

IV Les combinaisons

Définition 4

Soit E un ensemble de n élements.
Tout partie de E qui contient p élements ($p \leq n$) s'appelle une combinaisons de p élements parmi n élements.
Le nombres des combinaisons de p élements parmi n élements est noté C_n^p et on a :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

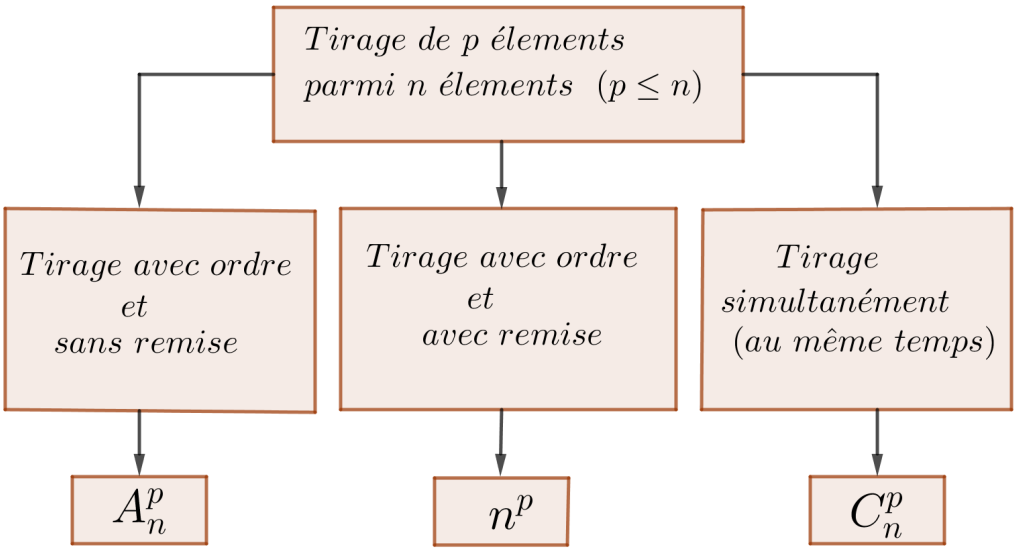
Example 4

1. Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble.
   Le nombre des combinaisons de deux élements de E est $C_4^2 = 6$.
2. Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ un ensemble.
   Le nombre des parties de trois chiffres qu'on peut formes à partir de E est $C_6^3 = 20$.

Propriété 3

Soient n et p deux nombres entiers naturels non nuls ($p \leq n$).

- $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$
- $C_n^n = 1$
- $C_n^{n-1} = n$
- $C_n^1 = n$



Exercice 1

On lance un piéce de monnaie trois fois.

1. *Déterminer le nombre des résultats possibles, en utilisant :*
   (a). *L'arbre des choix.*
   (b). *Le principe général de dénombrement.*
2. *Déterminer le nombre de possibilités pour obtenir P dans le premier lancer et F dans le deuxiéme lancer*

Exercice 2

Une urne contient 9 boules, on tire trois boule de l'urne.
Déterminer le nombre des tirages possibles dans chacuns des cas suivants :

1. *Tirage simultanément.*
2. *Tirage avec ordre et avec remise.*
3. *Tirage avec ordre et sans remise.*

V Exercices

Dénombrement

8

1. Calculer C_{12}^{3}.
2. Une urne contient 7 boules blanches et 5 boules noires. On tire simultanément 3 boules de cette urne.
   (a). Combient y a-t-il de tirages possibles?
   (b). Combient y a-t-il de tirages contenant trois boules de mêmes couleurs?

9

Une urne contient 15 boules (5 blanches - 7 rouges - 3 vertes). On tire simultanément 3 boules de cette urne.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant trois boules de couleur différentes deux-à-deux?

10

Une urne contient 12 boules (4 blanches - 6 rouges - 2 vertes). On tire au hasard 3 boules successivement et sans remise.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ou le nombre de possibilités? ($card(\Omega) =?$)
2. Quel est le nombre de possibilités pour tires 3 boules de même couleur?

11

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules rouges.
On tire au hasard 2 boules successivement et avec remise.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ou le nombre de possibilités? ($card(\Omega) =?$).
2. Quel est le nombres de possibilités de tirer 2 boules blanches?
3. Quel est le nombres de possibilités de tirer 2 boules rouges?
4. Quel est le nombres de possibilités de tirer 2 boules de même couleur?
5. Quel est le nombres de possibilités de tirer 2 boules de couleurs différentes?

12

1. Un propriétaire de magasin a réduit le prix d'une chemise de 30% pour que son prix après la réduction soit de 140 DH. Calculer le prix de la chemise avant la réduction.
2. Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement et sans remise 3 boules de cette urne.
   (a). Combien y a-t-il de tirages possibles?
   (b). Combien y a-t-il de tirages contenant trois boules de même couleur?

Leçon 6

Les limites

Objectifs

- Calculer les limites des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles en $+\infty$, $-\infty$ et en x_0

I Limites des fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^3$ et limites de leurs inverses en 0, $+\infty$ et $-\infty$ 44

1 Limites des fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^3$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$ 44

2 Limites des fonctions $x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$, $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$ 45

II Limite à gauche - Limite à droite 45

III Les opérations sur les limites 46

1 La limite et la somme 46

2 La limite et la multiplication 46

3 Limite et le quotient 46

IV Limite d'une fonction polynômiale et d'une fonction rationnelle 47

Notation :

Soient f une fonction numérique et a et l deux nombres réels.
L'écriture " $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ " se lit la limite lorsque x tend vers a de f égale à l.

Example 1

1. $f(x) = 3x + 1$.
   - $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} 3x + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$.
   - $\lim\limits_{x\to 10} f(x) = \lim\limits_{x\to 10} 3x + 1 = 3 \times 10 + 1 = 31$.
2. $g(x) = x^2 - 2$.
   - $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 - 2 = 0^2 - 2 = -2$.
   - $\lim\limits_{x\to -2} g(x) = \lim\limits_{x\to -2} x^2 - 2 = (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$.

I Limites des fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^3$ et limites de leurs inverses en 0, $+\infty$ et $-\infty$

1 Limites des fonctions $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^3$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$

Propriété 4

1. $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$

Example 2

Calculons les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} 4x$ **et** $\lim\limits_{x\to 0} 8x^2$.
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} -7x^2$ **et** $\lim\limits_{x\to +\infty} 4x^3$.
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} 2x^2$ **et** $\lim\limits_{x\to -\infty} -5x^3$.

2 Limites des fonctions $x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$, $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$ en 0 , $+\infty$ et $-\infty$

Propriété 5

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^3} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^3} = -\infty$

Propriété 6

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

Example 3

Calculons les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-3}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-7}{x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{10^6}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{17}{x^2}$

II Limite à gauche - Limite à droite

Example 4

Calculons les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{3}{x-2}$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{3x+1}{2x-6}$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{3x+1}{2x-6}$
3. $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4}$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{5x-20}{-2x+4}$
4. $\lim\limits_{x\to 7^+} \frac{x-4}{-2x+14}$ **et** $\lim\limits_{x\to 7^-} \frac{x-4}{-2x+14}$

III Les opérations sur les limites

1 La limite et la somme

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I**

Example 5

Calculons les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\frac{3}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+\frac{3}{x}$.
2. $\lim\limits_{x\to0^-} x^2+\frac{3}{x}$; $\lim\limits_{x\to0^+} x^2+\frac{3}{x}$.

2 La limite et la multiplication

$\lim f$	$+\infty$	$+\infty$	l	$+\infty$	**0**
$\lim g$	$+\infty$	**0**	l'	l' $(l'\neq0)$	$+\infty$
$\lim(f\times g)$	$+\infty$	**F.I**	$l\times l'$	$+\infty$	**F.I**

Example 6

Calculons les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+1)\times(\frac{1}{x}-1)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1)\times(\frac{1}{x}-1)$.
2. $\lim\limits_{x\to0^-} (x^2+1)\times(\frac{1}{x}-1)$; $\lim\limits_{x\to0^+} (x^2+1)\times(\frac{1}{x}-1)$.

3 Limite et le quotient

$\lim f$	l	l $(l\neq0)$	**0**	l	$+\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	**0**	**0**	$+\infty$	l	$+\infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	**F.I**	**0**	$+\infty$	**F.I**

Example 7

Calculons les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+4}{4x-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Remarque 2

- **" F.I " signifie "Forme indéterminé".**
- **Les formes indéterminés sont :** $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty\times 0, +\infty-\infty, -\infty+\infty$

IV Limite d'une fonction polynômiale et d'une fonction rationnelle

Proposition 1

1. **La limite d'une fonction polynômiale en $+\infty$ et $-\infty$ est la limite du monôme de plus grand degré.**
2. **La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et $-\infty$ est la limite du quotient des monômes de plus grand degré.**

Example 8

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^4+2x^3-x^2+8x+1$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^4+2x^3-x^2+8x+1$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} -9x^3-8x^2+14$
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} -9x^3-8x^2+14$
5) $\lim\limits_{x\to 1} 7x^3-28x^2+14x+3$
6) $\lim\limits_{x\to 2} 3x^2+3x-10$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} 16x^5-100$
8) $\lim\limits_{x\to-\infty} 25x^3-14x$

Example 9

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^6-x^2+1}{x^4+x-4}$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{15x^3+2x^2-1}{5x^3-14x}$
4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{15x^3+2x^2-1}{5x^3-14x}$
5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3+8x^2+4x+8}{x^5+17x^2-1}$
6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3+8x^2+4x+8}{x^5+17x^2-1}$
7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8x^2+4x+2}{14x-2}$
8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-1}{x+4}$

Leçon 7

La dérivabilité

Objectifs

- **Reconnaitre que le nombre dérivée d'une fonction en x_0 est le coefficient directeur de la tangeante à cette courbe au point d'abscisse x_0.**
- **Reconnaitre la dérivabilité des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles.**
- **Déterminer l'équation de la tangeante à une courbe en un point donné et la construire.**
- **Déterminer la monotonie d'une fonction à partir de l'étude du signe de sa dérivée.**
- **Résoudre des problémes d'application sur les valeurs minimales et les valeurs maximales.**
- **Déterminer le signe d'une fonction à partir de son tableau de variations ou de sa représentation graphique.**

I Dérivabilité en un point 50
1 Le nombre dérivé 50
2 Interprétation géométrique de nombre dérivé 50
II Fonctions dérivées 51
1 Dérivabilité sur un intervalle 51
2 La fonction dérivée 51
3 Dérivation des fonctions $x \longmapsto a$, $x \longmapsto ax$, $x \longmapsto x^n$ 51
4 Les opérations sur les fonctions dérivées 51
III Applications de la fonction dérivée 52
1 Monotonie d'une fonction et le signe de sa dérivée 52
2 Les extrêmums d'une fonction dérivable 52

I Dérivabilité en un point

1 Le nombre dérivé

Définition 1

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvet I et a∈I.
On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre réel l tel que :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$$

l s'appelle le nombre dérivé de f en a, on le note par $f'(a)$ et on a :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Example 1

Etudions la dérivabilité de f en a dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=2x+1$ **et** $a=1$.
2. $f(x)=x^2$ **et** $a=2$.
3. $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$ **et** $a=3$.

2 Interprétation géométrique de nombre dérivé

Définition 2

Soient f une fonction dérivable en a et C_f sa courbe représentative dans un repére orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
La droite $(T):y=f'(a)(x-a)+f(a)$ **est tangeante à C_f en $(a,f(a))$.**
$f'(a)$ s'appelle le coeficient directeur de la droite (T).

Example 2

Déterminons l'équation de la droite (T) tangeante à (C_f) en (a,f(a)) dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=x^2$ **et** $f'(3)=6$.
2. $f(x)=\dfrac{3}{x-2}$ **et** $f'(0)=\dfrac{-3}{4}$.
3. $f(x)=-x^2+x+2$ **et** $f'(-1)=3$.

II Fonctions dérivées

1 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 3

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I.
On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point a de I.

2 La fonction dérivée

Définition 4

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.
La fonction dérivée de f est la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

3 Dérivation des fonctions $x \longmapsto a$, $x \longmapsto ax$, $x \longmapsto x^n$

La fonction f	$f(x) = a$	$f(x) = ax$	$f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N})$
La fonction dérivée f'	$f'(x) = 0$	$f'(x) = a$	$f'(x) = nx^{n-1}$

4 Les opérations sur les fonctions dérivées

La fonction f	$f = u + v$	$f = \alpha u$	$f = uv$	$f = \frac{1}{u}$	$f = \frac{u}{v}$	$f = u^n$
La fonction dérivée f'	$f' = u' + v'$	$f' = \alpha u'$	$f' = u'v + uv'$	$f' = -\frac{u'}{u^2}$	$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$f' = nu'u^{n-1}$

Example 3

Déterminons f' la fonction dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1) $f(x)=17$
2) $f(x)=7x$
3) $f(x)=8x+6$
4) $f(x)=(2x+1)(x-2)$
5) $f(x)=(3x-2)(3x+2)$
6) $f(x)=\dfrac{2x+4}{3x+1}$
7) $f(x)=\dfrac{5x-4}{2x+3}$
8) $f(x)=x^2-3x+8$
9) $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2+6x-2$
10) $f(x)=2x^3-x^2+3x+6$
11) $f(x)=x^3-2x$
12) $f(x)=x^4+2x^3-x^2+2x-5$

III Applications de la fonction dérivée

1 Monotonie d'une fonction et le signe de sa dérivée

Propriété 7

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

1. **On dit que f est croissante sur I si et seulement si :** $\forall x\in I \quad f'(x)\geq 0$.
2. **On dit que f est décroissante sur I si et seulement si :** $\forall x\in I \quad f'(x)\leq 0$.

2 Les extrêmums d'une fonction dérivable

Propriété 8

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a\in I$.

1. **Si f(a) est un extrêmum de f en a alors $f'(a)=0$.**
2. **Si f' s'annule en a ($f'(a)=0$) en changeant le signe alors f(a) est un extrêmum de f en a.**

Example 4

Etudions la monotonie de f en déterminant - s'ils existent - leurs extrêmums dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=3x-7$
2. $f(x)-2x+5$
3. $f(x)=x^2+3$

Leçon 8

Etude et représentation d'une fonction

Objectifs

- **Utiliser les éléments de symétrie de la courbe d'une fonction pour réduire son domaine d'étude.**
- **Représenter des fonctions polynômes de degré deux ou trois et des fonctions homographiques.**
- **Utiliser la représentation d'une fonction ou son tableau de variations pour étudier les solutions de certaines équations et inéquations.**

I Asymptote horizontale - Asymptote verticale 54

II Etude et représentation de la fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ 54

III Etude et représentation de la fonction $x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ 55

IV Etude et représentation de la fonction $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0)$ 56

V Examens régionaux 57

Prof : Bouyguir Taher

I Asymptote horizontale - Asymptote verticale

Définition 1

Soient f une fonction numérique et C_f sa courbe représentative dans un repére orthnormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. **Si $\lim\limits_{x\to-\infty} = a$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} = a$ alors la droite $\boxed{(\Delta) : y = a}$ est une asymptote horizontale de la courbe C_f au voisinage de $-\infty$ ou $+\infty$.**
2. **Si $\lim\limits_{x\to a^-} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} = +\infty$ alors la droite $\boxed{(\Delta) : x = a}$ est une asymptote verticale de C_f**

Example 1

Déterminons les asymtotes horizontales et verticales à C_f dans chacuns des cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{5x+3}{x-1}$
2. $f(x) = \dfrac{-3x+1}{2x+8}$

II Etude et représentation de la fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$

Example 2

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. **Déterminons D_f.**
2. **Calculons les limites de f aux bornes de D_f.**
3. **Calculons $f'(x)$.**
4. **Dressons le tableau de variations de f.**
5. **Déterminons - s'ils existent - les extrêmums de f.**
6. **Déterminons les équations de (T) et T' les droites tangeantes à (C_f) respectivement au point d'abscisse -1 et 1.**
7. **Déterminons les points d'intersection de (C_f) avec les axes de repére orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.**
8. **Construire (C_f) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.**

Application 1 ***Soit f la fonction numérique définie par :*** $f(x) = -2x^2 + x + 1$.
Les mêmes questions de l'exemple précédente.

III Etude et représentation de la fonction $x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$

Example 3

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2$

1. **Déterminer** D_f.
2. **Clculer :** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. **Vérifier que :** $\forall x \in D_f,\ f'(x) = 3x(x-2)$.
4. **Etudier le signe de** $f'(x)$.
5. **En déduire le tableau de variations de f sur** D_f.
6. **Calculer : f(3), f(1) et f(-1).**
7. **Déterminer l'équation de la tangeante à** (C_f) **au point d'abscisse 2.**
8. **Construire** (C_f).

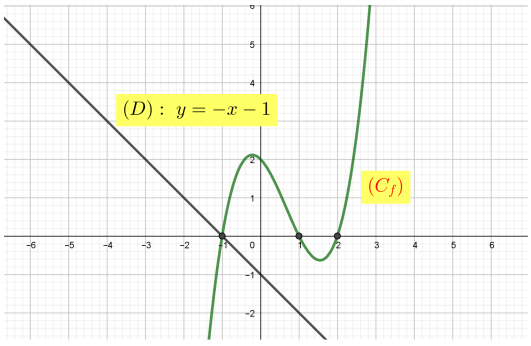
Application 2

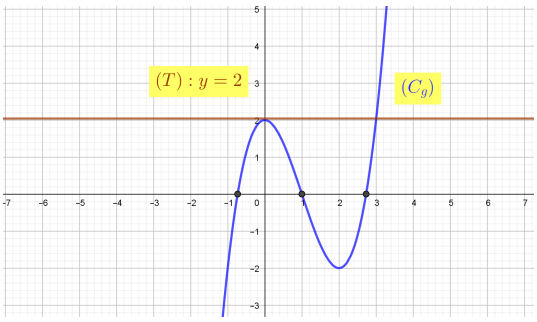
Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + 7$
et (C_f) ***sa courbe représentative.***

1. ***Calculer f(0) et f(-3).***
2. ***Clculer :*** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ***et*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. ***Vérifier que :*** $\forall x \in D_f,\ f'(x) = (x+3)^2$.
4. ***Donner le tableau de variations de f sur*** $\mathbb{R}$.
5. ***Déterminer l'équation de la tangeante à*** (C_f) ***au point d'abscisse -1.***

Exercice 1

Soient $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ ***et*** $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ ***deux fonctions numériques et*** C_f ***et*** C_g ***sont respectivement leurs courbes représentatives.***





En utilisant les graphes ci-dessus, résoudre dans $\mathbb{R}$ ***les équations et les inéquations suivantes :***

- $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$
- $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

- $x^3 - 2x^2 - x + 2 \geq -x - 1$
- $x^3 - 3x^2 + 2 \leq 2$

IV Etude et représentation de la fonction $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0)$

Example 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

1. **Déterminer** D_f.
2. **Calculer :**
   (a). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b). $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.
3. **Montrer que :** $\forall x \in D_f,\ f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$.
4. **Donner le tableau de variations de f sur** D_f.
5. **Déterminer les points d'intersection de** (C_f) **avec les axes du repére orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
6. **Montrer que l'équation de la droite tangeante à** (C_f) **au point d'abscisse 2 est :** $(T) : y = -3x + 11$
7. **Construire** (C_f) **dans le repére** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Application 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ ***par :*** $f(x) = \frac{2x+2}{x}$

1. ***Déterminer*** D_f.
2. ***Calculer*** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ ***et*** $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.
3. ***(a). Montrer que :*** $\forall x \in D_f,\ f'(x) = \frac{-2}{x^2}$ ***et étudier le signe de*** f'.
   (b). Déterminer les points d'intersection de (C_f) ***avec les axes du repére orthonormé*** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (c). Construire (C_f) ***dans le repére*** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

V Examens régionaux

Oujda Nador
2014/2015

Examen régional

1bac lettres
Session normale

Exercice 1 (4 pts)

1 **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 - 11x + 24 = 0$.** **1.5 pt**

2 **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 - 11x + 24 \leq 0$.** **1 pt**

3 **1.5 pt**

(a). **Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système :** $\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 38 \end{cases}$

(b). **Ahmed et Maryam ont organisé une fête à l'occasion de leur réussite à l'examen. Si le nombre d'amis invités par Maryem est de 6 de moins que ceux invités par Ahmed, et le nombre total d'amis invités est 38. Combient de personnes ont invitées chacune ?**

Exercice 2 (4 pts)

Soit $(U_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r = 4$ et $U_0 = 11$.

1 **Ecrire U_n en fonction de n et vérifier que : $U_{50} = 211$.** **1.5 pt**

2 **Trouver le nombre entier naturel n tel que : $U_n = 2015$.** **1 pt**

3 **Calculer la somme suivante : $S = U_0 + U_0 + \ldots + U_{50}$** **1.5 pt**

Exercice 3 (4 pts)

Soient les fonction g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} - \{1\}$ par :

$g(x) = x^3 + 2x$ **et** $h(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$

1 **Calculer les limites suivantes :** **2 pt**

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$

2 **Calculer :** $g'(x)$ **et** $h'(x)$ **2 pt**

Exercice 4 (4 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$

1. **Clculer** $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ — **1 pt**
2. (a). **Vérifier que :** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4(2x-1)$ — **0.5 pt**
   (b). **Etudier le signe de** $f'(x)$ **et donner le tableau de variations de f.** — **0.75 pt**
3. **Déterminer les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses.** — **1 pt**
4. **Construire la courbe** (C_f) **de f.** — **0.75 pt**

Exercice 5 (4 pts)

Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires indiscernable au toucher.

1. **Déterminer le pourcentage des boules blanches dans l'urne.** — **1 pt**
2. **On tire simultanément 2 boules de cette urne.**
   (a). **Vérifier que le nombre de tirages possibles est 10.** — **1 pt**
   (b). **Combien y a-t-il de tirages contenant deux boules de même couleur ?** — **2 pt**

Tanger Tétouan
2017/2018

Examen régional

1bac lettres
Session rattrapage

Exercice 1 (6 pts)

1 (a). **Montrer que le discriminant de l'équation** $5x^2+2x-7=0$ **est** $\Delta=12^2$. **0.5 pt**

(b). **Résoudre dans** $\mathbb{R}$ **l'équation :** $5x^2+2x-7=0$ **1.5 pt**

2 **Résoudre dans** $\mathbb{R}$ **l'inéquation :** $3x^2-x+1\geq 0$ **1 pt**

3 **Résoudre dans** $\mathbb{R}^2$ **le système :** $\begin{cases} x+y=35 \\ 3x-4y=0 \end{cases}$ **2 pt**

4 **Un ecaisse contient 10 billets d'argents de la catégorie 200 DH et 15 billets d'argents de la catégorie 100 DH. Clculer le pourcentage des billets d'argents de la catégorie 200 dh dans cette caisse?** **1 pt**

Exercice 2 (4 pts)

Soit $(U_n)_n$ **une suite telle que :** $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3} \end{cases}$ $;(\forall n\in\mathbb{N})$

1 **Calculer** U_1 **et** U_2. **1 pt**

2 **Montrer que** $(U_n)_n$ **est une suite géométrique de raison** $q=\dfrac{1}{3}$. **1 pt**

3 **Montrer que :** $U_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$. **1 pt**

4 **Calculer la somme suivante :** $S=U_0+U_1+\ldots+U_9$. **1 pt**

Exercice 3 (2 pts)

Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire simultanément 3 boules de cette urne.

1 **Combien y a-t-il de tirages possibles?** **1 pt**

2 **Combien y a-t-il de tirages contenant trois boules de même couleur?** **1 pt**

Exercice 4 (8 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ **par :** $f(x)=2x^3-3x^2+1$

1 **Clculer** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **1 pt**

2 **(a). Vérifier que :** $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 6x(x-1)$ **1 pt**

(b). Etudier le signe de $x(x-1)$ **et donner le tableau de variations de f.** **2 pt**

(a). Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-1)^2(2x+1)$**.** **0.5 pt**

(b). Déterminer les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses. **1.5 pt**

3 **Construire la courbe** (C_f) **de f.** **2 pt**

Tanger Tétouan
2016/2017

Examen régional

1bac lettres
Session rattrapage

Exercice 1 (6 pts)

1 (a). Montrer que le discriminant de l'équation $x^2-3x-10=0$ est $\Delta=49$. **0.5 pt**

(b). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2-3x-10=0$. **1 pt**

(c). Développer : $(x+2)(x-5)$. **0.5 pt**

(d). Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2-3x-10\leq 0$. **1 pt**

2 Le prix d'un kilogramme de farine est 7 DH.
Quel est leur prix aprés une augmentation de 15% ? **1 pt**

3 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} 3x-2y=7 \\ 2x-y=4 \end{cases}$ **2 pt**

Exercice 2 (4 pts)

1 Soit $(U_n)_n$ une suite arithmétique de raison r = 5 et du premier terme $U_0=3$.

(a). Calculer U_1 et U_2. **1 pt**

(b). Calculer la somme suivante : $S=U_0+U_1+\ldots+U_{20}$. **1.5 pt**

2 Soit $(V_n)_n$ une suite géométrique de raison q et du premier terme $V_1=4$.

(a). Montrer que q = 6. **0.5 pt**

(b). Ecrire V_n en fonction de n. **1 pt**

Exercice 3 (2 pts)

Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules jaunes et 4 boules vertes. On tire simultanément 3 boules de cette urne.

1 Combien y a-t-il de tirages possibles ? **1 pt**

2 Combien y a-t-il de tirages contenant trois boules de même couleur ? **1 pt**

Exercice 4 (8 pts)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}$

1 Calculer $f(0)$, $f(3)$ et $f(\frac{1}{2})$ **0.75**

2 **Calculer** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$**.** **2 pt**

3 **(a). Montrer que :** $\forall x \in]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$**.** **1.5 pt**

(b). Donner le tableau de variations de f sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$**.** **1 pt**

4 **(a). Montrer que l'équation de la droite tangeante à** (C_f) **au point** $A(3;5)$ **est :** $(T) : y = -3x + 14$**.** **0.75 pt**

(b). Construire (C_f) **dans un repére orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$**.** **1.5 pt**

(c). Résoudre graphiquement l'inéquation : $\dfrac{2x-1}{x-2} \geq 5$**.** **0.5 pt**