Chapitre

Notions de logique

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
• **On approchera les propositions, les lois logiques et les méthodes de raisonnement, à partir d'activités variées et diverses, issues des acquis de l'élève et de situations déjà rencontrées.** • **On évitera toute construction théorique et toute utilisation excessive de tableaux de vérité.**	• **Utiliser le raisonnement convenable selon la situation étudiée.** • **Rédiger des raisonnements mathématiques et des démonstrations claires et logiquement correctes.** • **Étudier la vérité d une proposition logique.** • **Comprendre le sens d une proposition logique et donner sa négation.**

Contenu du programme	Les extensions
• Propositions ; opérations sur les propositions ; les quantificateurs. • Les raisonnements mathématiques : raisonnement par l'absurde ; raisonnement par disjonction des cas ; raisonnement par équivalence.	• Calcul numérique. • équations et inéquations. • Les suites numériques. • Les fonctions numériques, logarithmiques et exponentielles. • Les limites et la dérivation.

• ***Quelques motivations***

Les mathématiques est un langage pour s'exprimer rigoureusement, qui rend les calculs exacts et véritables. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer.

I Proposition

1 Activité

Activité

Mettre une croix ($\times$) dans la case qui convient :

Textes mathématiques	Vrai	Faux	On ne peut pas décider sa vérité
"15×2"			
"$-4 \geqslant 12$"			
"$\sqrt{9} = 3$"			
"7 est un nombre pair"			
"$\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$"			

2 Définition

Définition

Une proposition est un texte mathématique qui a un sens et qui soit vrai soit faux pas les deux en même temps.

3 Exemples

- La proposition : " $3 \times 2 = 16$ " est *fausse*
- La proposition : " Deux droites strictement parallèles se coupent" est *fausse*
- La proposition : " $5 > 3$ " est *vraie*

II Les quantificateurs

1 Le quantificateur existentiel "∃"

a

Définition

La proposition "$(\exists x \in E) : P(x)$ " signifie qu'il existe au moins un élément $x \in E$ qui vérifie $P(x)$. et qu'elle soit vrai lorsque on trouve au moins un élément x de E qui vérifie $P(x)$.

Le symbole ∃ est appelé "**le quantificateur existentiel**" et se lit "**il existe au moins**".

• Exemple

⊛ La proposition P_1 : "$(\exists x \in \mathbb{R}) : 2x+1=0$" est vraie, (car l'élément $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ vérifie $2x+1=0$)

⊛ La proposition P_2 : "$(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2=-1$" est fausse, (car il n'existe pas d'élément de $\mathbb{R}$ qui vérifie $x^2=-1$)

⊛ La proposition P_3 : "$(\exists n \in \mathbb{N}) : n+1=0$" est fausse, (car il n'existe pas d'élément de $\mathbb{N}$ qui vérifie $n=-1$ $(-1 \notin \mathbb{N})$)

Exercice

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. Q_1 : "$(\exists \in \mathbb{R})4x-3=0$"
2. Q_2 : "$(\exists \in \mathbb{R})x^2+x-2=0$"
3. Q_3 : "$(\exists \in \mathbb{R})x^2-x+2=0$"
4. Q_4 : "$(\exists \in \mathbb{R})4x-16>0$"

2 Le quantificateur universel "∀"

a

Définition

Soit "$(x \in E)$" une fonction propositionnelle $(E \neq \emptyset)$

La proposition "$(\forall x \in E) : P(x)$ " signifie que tout élément $x \in E$ vérifie $P(x)$. et qu'elle soit vrai lorsque pour tout x de E on a $P(x)$ est vraie.

Le symbole $\forall$ est appelé "**le quantificateur universel**" et se lit "**pour tout**" ou "**quel que soit**".

b

Exemple

⊛ La proposition P_4 : "$(\forall x \in \mathbb{R}) : 2x+1=0$" est fausse, (car l'élément $0 \in \mathbb{R}$ ne vérifie pas $2x+1=0$)

⊛ La proposition P_5 : "$(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq 0$" est vraie, (car pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$)

Exercice

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. Q_4 : "$(\forall \in \mathbb{R}) x^2+1 \geq 1$"
2. Q_5 : "$(\forall \in \mathbb{R}) x^2+x+2 > 0$"
3. Q_6 : "$(\forall \in \mathbb{R}) 4x+16 > 0$"

Exercice

1. Écrire les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs
   - P : "pour tout entier naturel n le nombre $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel"
   - Q : "il existe au moins deux entier relatif n et m tel que : $n-m=5$"
2. Déterminer la valeur de vérité des propositions P et Q.

III Opérations sur les propositions

1 La négation d'une proposition

a

Définition

La négation d'une proposition P notée (non P) ou $(\neg P)$ ou $(\overline{P})$ est la proposition qui est vraie si P est fausse et qui est fausse si P est vraie.

Table de vérité :

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

b

Exemple

- La négation de la proposition "$P : 1 > \sqrt{2}$" est "$\neg P : 1 \leq \sqrt{2}$"
- La négation de la proposition "$Q : \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$" est "$\neg Q : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$"
- La négation de la proposition "$R : (-2)^2 = -4$" est "$\neg R : (-2)^2 \neq -4$"

c

1. Pour déterminer la négation d'une proposition il faut déterminer la négation de Certains Symboles :

Le symbole	$=$	$<$	$>$	$\in$	$\subset$	$\forall$
La négation	$\neq$	$\geq$	$\leq$	$\notin$	$\not\subset$	$\exists$

2. La négation de la proposition "$(\exists x \in E) : P(x)$" est "$(\forall x \in E) : \neg P(x)$".

La négation de la proposition "$(\forall x \in E : P(x)$" est "$(\exists x \in E) : \neg P(x)$".

3. Pour montrer que la proposition "$(\forall x \in E : P(x)$" est fausse, il suffit de montrer que sa négation "$(\exists x \in E) : \neg P(x)$" est vraie, et donc il suffit de donnée un exemple.

Exercice

Montrer que la proposition "$(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$" est fausse

Exercice

1 Déterminer la négation des proposition suivantes :

$P_1 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}) : x \leq n$ $P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}) : 2x+1=3$ $P_3 : \mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$

$P_4 : \forall n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{Z}$ $P_5 : (\forall x \in \mathbb{R}) : 4x+16 \geq x$

2 Déterminer la valeur de vérité des propositions précédentes

2 Conjonction de deux proposition

a

L'étudiant *Omar* enseigne à la fois L'arabe ; Le français et L'anglais.

Déterminer la valeur de vérité des proposition suivantes :

P_1 : "Omar enseigne l'arabe et le français"

P_2 : "Omar enseigne l'arabe et l'espagnol"

P_3 : "Omar enseigne l'espagnol et l'allemand"

b

Définition

la conjonction de deux propositions notée ("P et Q") ou $(P \wedge Q)$ est une proposition qui est vraie si P et Q sont vraies, et qui est fausse sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

c

1 : la proposition " Deux droites strictement parallèles se coupent" et "$2 \in \mathbb{N}$" est une proposition fausse.

2. la proposition "$\sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$" et "$\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$" est fausse.

3. la proposition "$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$" et "3 est impair" est une proposition vraie.

Remarque

Les propositions (P et Q) et (Q et P) ont la même vérité. On dit que la conjonction est *commutative*.

3 La disjonction de deux propositions

a

L'étudiant *Omar* enseigne à la fois L'arabe ; Le français et L'anglais.

Déterminer la valeur de vérité des proposition suivantes :

P_1 : "Omar enseigne l'arabe ou le français".

P_2 : "Omar enseigne l'arabe ou l'espagnol".

P_3 : "Omar enseigne l'espagnol ou l'allemand"

b

Définition

la disjonction de deux propositions notée ("P ou Q") ou ($P \vee Q$) est une proposition qui est fausse si P et Q sont fausses, et qui est vraie sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

c

1 : la proposition " Deux droites strictement parallèles se coupent" ou "$2 \in \mathbb{N}$" est une proposition vraie.

2. la proposition "$\sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$" ou "$\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$" est une proposition vraie.

3. la proposition "$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$" ou "$\mathbb{R} \subset \mathbb{N}$" est une proposition fausse.

Remarque

Les propositions (P ou Q) et (Q ou P) ont la même vérité. On dit que la conjonction est *commutative*.

Propriété

La négation de la proposition (P ou Q) est la proposition ($\neg P$ et $\neg Q$).

La négation de la proposition (P et Q) est la proposition ($\neg P$ ou $\neg Q$).

4 Implication de deux propositions

a

Définition

L'implication de la proposition P vers la proposition Q est la proposition notée $P \Rightarrow Q$ qui est fausse si P est vraie et Q est fausse et qui est vraie sinon.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

b

1. "$9 > 4 \Rightarrow 9 > 2$" est une proposition vraie.

2. "$\sqrt{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$"est une proposition vraie.

3. "3 est un nombre impair $\Rightarrow$ 4 est un nombre impair" est une proposition fausse. 4. "4 est un nombre impair $\Rightarrow$ 3 est un nombre impair" est une proposition vraie.

c

1. La proposition $P \Rightarrow Q$ se lit " P implique Q " (ou si P alors Q).

2. les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ n'ont pas le même sens.

3. L'implication $Q \Rightarrow P$ est l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$.

4. Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, on commence de la proposition P et il faut trouver la proposition Q. (on suppose que P est vraie et on montre que Q est vraie).

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x) = ax^2 + c$, $(a \neq 0)$.

Considérons les deux propositions :

P : "l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions". Q : "$ac < 0$".

Montrer que : $P \Rightarrow Q$.

5 Équivalence de deux propositions

a

Définition

léquivalence de deux propositions P et Q est une proposition notée $(P \Leftrightarrow Q)$ qui est vraie si P et Q ont la même vérité et qui est fausse dans les cas contraires.

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$P \Leftrightarrow Q$ signifie que "$P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$"

b

"$|2-\pi| = \pi - 2 \Leftrightarrow \sqrt{2^2} = 2$" est une proposition vraie

"$1 + \sqrt{3}^2 = 4 \Leftrightarrow 12 = 2^2 \times 3^2$" est une proposition fausse

"$-1 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow -1 > 0$" est une proposition vraie

"$(\exists n \in \mathbb{Z}) : 2n - 1 = 0 \Leftrightarrow 2$ est un nombre impair" est une proposition fausse

c

1. $P \Leftrightarrow Q$ se lit (P équivaut à Q) ou (P si et seulement si : Q) ou (P si équivalant à Q).
2. $P \Leftrightarrow Q$ est la proposition ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$).
3. Les deux propositions $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow P$ ont le même sens.
4. On général pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$ il suffi de montrer que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

IV Raisonnements mathématiques

1 Raisonnements par équivalence

• Exemple

Montrer que :

$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$

2 Raisonnements par disjonction des cas

• Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x| + 5 = 3x$

3 Raisonnements par l'absurde

• Exemple

Montrer que 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$

Chapitre

Calcul numérique

Cours 1BSHL

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
• **On rappellera la notion de la proportionnalité et les autres notions en relation avec elle, et on les renforcera dans des situations en rapport avec les spécificités de ces deux branches.** • **La résolution des équations et inéquations du premier degré ou du second degré à une inconnue et des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues, a déjà été pratiquée, on évitera de la présenter de nouveau.** • **Il faudra consolider et renforcer toutes ces notions, dans le cadre d'activités variées et bien choisies et dans le cadre de la mathématisation de problèmes issus de la vie quotidienne ou des matières de la spécialité, pour faire acquérir aux élèves les habiletés et les capacités attendues.**	• **Utiliser la proportionnalité pour traiter des situations variées.** • **Résoudre des équations et des inéquations se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue ;** • **Résoudre des systèmes du premier degré à deux inconnues par les différentes méthodes étudiées ;** • **Mathématiser des situations faisant intervenir des quantités variables, se ramenant à la résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes.**

Contenu du programme	Les extensions
• La proportionnalité ; les pourcentages ; l'échelle. • Équations et inéquations du premier degré ou du second degré à une inconnue ; • Signe d'un trinôme du second degré ; • Système de deux équations du premier degré à deux inconnues.	• Les suites numériques • Généralités sur les fonctions numériques • Dérivation et étude des fonctions

I Proportionnalité, pourcentage et échelle :

1 Le pourcentage :

Activité

Le nombre d'élèves d'une classe d'un lycée est 39 élèves. Quel est le pourcentage des garçons dans cette classe, sachant que leur nombre est 20 ?

Solution

Soit $x\%$ le pourcentage des garçcons dans cette classe.

On a :

$$39 \longrightarrow 100\%$$

$$20 \longrightarrow x\%$$

On a : $x = \dfrac{20 \times 100}{39} = \dfrac{2000}{39} = 51.28$

Donc le pourcentage des garçons est : 51.28%.

Activité

Une classe est composée de 35 élèves, 40% de ces élèves sont des garçons. Quel est le nombre des filles dans cette classe ?

Solution

Déterminons d'abord le nombre des garçons dans cette classe.

Soit x le nombre des garçons.

On a :

$$35 \longrightarrow 100\%$$

$$x \longrightarrow 40\%$$

Donc : $x = \dfrac{40 \times 35}{100} = \dfrac{1400}{100} = 14$

D'où le nombre des filles est : $35 - 14 = 21$.

a

Activité

Un littre de gasoil est passé de 12dh à 15dh. Quel est le pourcentage de cette augmentation ?

Solution

On a la valeur d'augmentation du prix est : $15 - 12 = 3$.

Soit $x\%$ le pourcentage d'augmentation du prix.

On a :

$$12 \longrightarrow 100\%$$

$$3 \longrightarrow x\%$$

On a : $x = \dfrac{3 \times 100}{12} = \dfrac{300}{12} = 25$

D'où le pourcentage d'augmentation du prix est : 25%.

b

Activité

Le prix d'un téléphone est 2000dh, sachant que son prix a augmenté de 5%.

1. Quelle est la valeur d'augmentation du prix ?
2. Quel est le nouveau prix ?

Solution

1. Soit x la valeur d'augmentation du prix.

   On a :

$$2000 \longrightarrow 100\%$$

$$x \longrightarrow 5\%$$

   On a : $x = \dfrac{5 \times 2000}{100} = \dfrac{10000}{100} = 100$

   Donc la valeur d'augmentation du prix est 100dh.

2 Le nouveau prix est : $2000 + 100 = 2100$dh.

Remarque

Après une augmentation du prix, on a la relation suivante :

Le nouveau prix= le prix initial + la valeur d'augmentation du prix

c

Activité

Une machine à laver à 3000dh est soldée avec 20%. Quel est son prix après réduction ?

Solution

Déterminons d'abord la valeur de réduction.

Soit x la valeur de réduction.

On a :

$$3000 \longrightarrow 100\%$$

$$x \longrightarrow 20\%$$

On a : $x = \dfrac{20 \times 3000}{1000} = \dfrac{*60000}{100} = 600.$

Donc le prix après réduction est : $3000 - 600 = 2400$dh.

Remarque

Après une réduction du prix, on a la relation suivante :

Le nouveau prix= le prix initial - la valeur de réduction du prix

2 Une fraction d'un nombre :

Propriété

Pour calculer ce que représente une fraction $\frac{p}{q}$ d'un nombre x, on multiplie $\frac{p}{q}$ par x.

• Exemple

Un enfant a acheté 20 bonbons et en a mangé $\frac{3}{10}$.

Combien de bonbons a-t-il mangé ?

Solution

L'enfant a mangé $\frac{3}{10} \times 20 = \frac{60}{10} = 6$ bonbons.

Application

Un ouvrier reçoit mensuellement un salaire de 3000dh et réserve $\frac{3}{4}$ de son salaire pour le logement et la nourriture. Combien lui reste pour ses autres dépenses ?

Solution

L'ouvrier réserve $\frac{3}{4} \times 3000 = \frac{9000}{4} = 2250$dh pour le logement et la nourriture.

Donc il lui reste : $3000 - 2250 = 750$dh pour ses autres dépenses.

3 L'échelle :

Propriété

La relation qui relie la distance sur la carte, la distance réelle et l'échelle est :

$$\text{Echelle} = \frac{\text{la distance sur la carte}}{\text{la distance réelle}}$$

Remarque

- À partir de cette relation, on peut déterminer l'une des 3 quantités si on connaît les 2 autres.
- L'échelle est toujours donnée sous forme d'une fraction qui a 1 comme numérateur.
- Il faut transformer toutes les unités en *cm* avant de commencer les calculs.

Tableau des transformations :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

Application

1 Calculer la distance que représente un segment de longueur 5,5cm sur une carte avec l'échelle $\frac{1}{200\,000}$.

2 Faire un plan d'une salle rectangulaire de dimensions 6m et 4m en utilisant l'échelle $\frac{1}{100}$.

3 La distance réelle entre Goulmima et Errachidia est 60km. Sachant que la distance entre ces 2 villes sur une carte géographique est 6cm. Quelle est l'échelle utilisée dans cette carte ?

Solution

1 Soit x la distance réelle.

On a :

$$1 \longrightarrow 200\,000$$

$$5.5 \longrightarrow x$$

On a : $x = \frac{5.5 \times 200\,000}{1} = \frac{1100000}{1} = 1100000\text{cm} = 1.1\text{km}$.

2 Soient x et y respectivement la longeur et la largeur sur la carte.

Les transformations :

6m=600cm et 4m=400cm.

On a :

$$1 \longrightarrow 100$$

$$x \longrightarrow 600$$

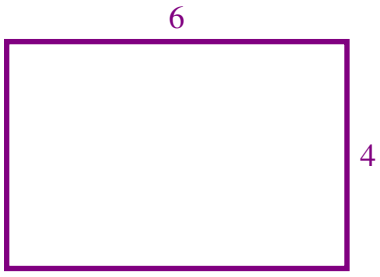
Donc : $x = \frac{600 \times 1}{100} = \frac{600}{100} = 6$ Donc la longueur sur la carte est 6cm.

D'autre part :

$$1 \longrightarrow 100$$

$$y \longrightarrow 400$$

Donc : $y = \dfrac{400 \times 1}{100} = \dfrac{400}{100} = 4$ Donc la largeur sur la carte est 4cm.



3 Soit x le dénominateur de l'échelle.

Les transformation : 60km=6000000cm. On a :

$$1 \longrightarrow x$$

$$6 \longrightarrow 6000000$$

On a : $x = \dfrac{1 \times 6000000}{6} = \dfrac{6000000}{6} = 1000000$

Donc l'échelle utilisée est : $\dfrac{1}{1000000}$.

II Les équations, les inéquations et les systèmes :

1 les équations du second degré à une inconnue :

a

Définition

une équation du second degré est toute équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ tels que a, b et c des nombres réels connus, avec $a \neq 0$.

• Exemple

L'équation	a	b	c
$x^2+2x-3=0$	1	2	-3
$4x^2-5x+1=0$	4	-5	1
$x^2-4x=0$	1	-4	0
$2x^2-1=0$	2	0	-1

b

Pour résoudre une équation du second degré, on calcule d'abord le discriminant Δ défini par : $\Delta = b^2-4ac$.

On distingue 3 cas :

1 Si $\Delta > 0$: alors l'équation admet deux solutions qui sont : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2 Si $\Delta = 0$: alors l'équation admet une seule solution qui est : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

3 Si $\Delta < 0$: alors l'équation n'admet pas de solution et on écrit $S = \emptyset$.

• Exemple

1 Résolvons l'équation $x^2+2x-3=0$.

On a : $a=1$; $b=2$; $c=-3$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 2^2-4\times 1\times(-3)\\ &= 4+12\\ &= 16>0\end{aligned}$$

Alors l'équation admet 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1} = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

D'où $S = \{-3;1\}$

2 Résolvons l'équation : $-x^2+2x-1=0$

On a : $a=-1$; $b=2$; $c=-1$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 2^2-4\times(-1)\times(-1)\\ &= 4-4\\ &= 0\end{aligned}$$

Alors l'équation admet une seule solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2\times(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

D'où $S = \{1\}$

3 Résolvons l'équation : $2x^2-x+3=0$.

On a : $a=2$; $b=-1$; $c=3$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= (-1)^2-4\times2\times3\\ &= 1-24\\ &= -23<0\end{aligned}$$

Alors l'équation n'admet pas de solution.

D'où $S = \emptyset$

Application

Résoudre les équations suivantes :

1 $x^2+3x-2=0$ | **2** $x^2+5x+7=0$ | **3** $4x^2-8x+3=0$

Solution

1 Résolvons l'équation $x^2+3x-2=0$.

On a : $a=1$; $b=3$; $c=-2$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 3^2-4\times 1\times(-2)\\ &= 9+8\\ &= 17>0\end{aligned}$$

Alors l'équation admet 2 solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{17}}{2\times 1}=\frac{-3-\sqrt{17}}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+\sqrt{17}}{2\times 1}=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$$

D'où $S=\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{2};\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}$

2 Résolvons l'équation : $x^2+5x+7=0$.

On a : $a=1$; $b=5$; $c=7$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 5^2-4\times 1\times 7\\ &= 25-28\\ &= -3<0\end{aligned}$$

Alors l'équation n'admet pas de solution.

D'où $S=\emptyset$

3 Résolvons l'équation $4x^2-8x+3=0$.

On a : $a=4\,;\,b=-8\,;\,c=3$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= (-8)^2-4\times4\times3\\ &= 64-48\\ &= 16>0\end{aligned}$$

Alors l'équation admet 2 solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times4}=\frac{8-4}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times4}=\frac{8+4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

$S=\left\{\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right\}$

Remarque

1. La méthode qu'on a vue reste valable seulement pour les équations du second degré et pas pour les équations du premier degré.
2. Si $b=0$ ou $c=0$ on n'a pas besoin de calculer Δ, mais on utilise la factorisation ou la troisième identité remarquable lorsque c'est possible.

• Exemple

1. Résolvons l'équation $x^2+3x=0$

   $x^2+3x=0$ alors $x(x+3)=0$ alors $x=0$ ou $x+3=0$ alors $x=0$ ou $x=-3$ D'où $S=\{0;-3\}$

2. Résolvons l'équation : $x^2-4=0$

   $x^2-4=0$ alors $x^2-2^2=0$ alors $(x-2)(x+2)=0$ alors $x-2=0$ ou $x+2=0$ alors $x=2$ ou $x=-2$.

   D'où $S=\{-2;2\}$

2 Factorisation du trinôme ax^2+bx+c :

la factorisation du trinôme ax^2+bx+c dépend du signe de Δ et des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$. On peut résumer les 3 cas possibles dans le tableau suivant :

$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$	$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$	Factorisation impossible

• Exemple

Factoriser les trinômes suivants :

1 x^2+5x-6 | 2 x^2-4x+4 | 3 $3x^2-x+2$

Solution

1 Résolvons d'abord l'équation $x^2+5x-6=0$.

On a : $a=1$; $b=5$; $c=-6$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 5^2-4\times1\times(-6)\\ &= 25+24\\ &= 49>0\end{aligned}$$

Alors l'équation admet 2 solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-\sqrt{49}}{2\times1}=\frac{-5-7}{2}=\frac{-12}{2}=-6$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{49}}{2\times1}=\frac{-5+7}{2}=\frac{2}{2}=1$$

D'où $S=\{-6;1\}$

Donc

$$x^2+5x-6 = 1(x-(-6))(x-1)$$
$$= (x+6)(x-1)$$

2 Résolvons d'abord l'équation : $x^2-4x+4=0$

On a : $a=1$; $b=-4$; $c=4$

$$\Delta = b^2-4ac$$
$$= 4^2-4\times 1\times 4$$
$$= 16-16$$
$$= 0$$

Alors l'équation admet une seule solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2\times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

D'où $S=\{2\}$

Donc

$$x^2-4x+4 = 1(x-4)^2$$
$$= (x-4)^2$$

3 Résolvons d'abord l'équation : $3x^2-x+2=0$.

On a : $a = 2\,;\, b = -1\,;\, c = 3$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-1)^2 - 4 \times 3 \times 2\\ &= 1 - 24\\ &= -23 < 0\end{aligned}$$

Alors l'équation n'admet pas de solution.

D'où $S = \emptyset$

Donc la factorisation est impossible.

3 Les inéquations du second degré à une inconnue :

a

Pour déterminer le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$, on résout d'abord l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et on distingue 3 cas :

• Si $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a		0	opposé du signe de a	0	Signe de a	

• Si $\Delta = 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a		0	Signe de a	

• Si $\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	

Exemple

Voir le paragraphe suivant.

Remarque

Dans tous les cas, on a le signe de a sauf à l'intérieur des racines dans le cas où $\Delta > 0$.

b

Définition

On appelle inéquation du second degré à une inconnue toute expression de la forme

$ax^2+bx+c \geq 0$ ou $ax^2+bx+c > 0$ ou $ax^2+bx+c \leq 0$ ou $ax^2+bx+c < 0$.

Méthode de résolution.

Pour résoudre une inéquation du second degré, on suit les étapes suivantes :

1 Résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$.

2 Tracer le tableau du signe du trinôme ax^2+bx+c.

3 En déduire les solutions de l'inéquation.

Exemple

Résolvons les inéquations suivantes :

1 a $x^2+2x-3 \geq 0$.

b $x^2+2x-3 < 0$.

2 a $-x^2+2x-1 \geq 0$.

b $-x^2+2x-1 < 0$.

3 a $2x^2-x+3 > 0$.

b $2x^2-x+3 \leq 0$.

Solution

1 Résolvons d'abord l'équation $x^2+2x-3=0$.

On a : $a = 1\,;\, b = 2\,;\, c = -3$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) \\ &= 4 + 12 \\ &= 16 > 0\end{aligned}$$

Alors l'équation admet 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

D'où $S = \{-3; 1\}$

Tableau de signe de $x^2 + 2x - 3$:

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		$+$	0	$-$	0	$+$	

a L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ est :

$S =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$

b L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 2x - 3 < 0$ est : $S =]-3; 1[$

2 Résolvons d'abord l'équation : $-x^2 + 2x - 1 = 0$

On a : $a = -1\,;\, b = 2\,;\, c = -1$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 2^2 - 4 \times (-1) \times (-1) \\ &= 4 - 4 \\ &= 0\end{aligned}$$

Alors l'équation admet une seule solution :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2\times(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

D'où $S = \{1\}$

Tableau de signe de $-x^2+2x-1$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
ax^2+bx+c		$-$	0	$-$	

a L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2+2x-1 \geq 0$ est : $S = \{1\}$

b L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x^2+2x-1 < 0$ est : $S =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

3 Résolvons l'équation : $2x^2-x+3=0$.

On a : $a=2$; $b=-1$; $c=3$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= (-1)^2-4\times2\times3\\ &= 1-24\\ &= -23<0\end{aligned}$$

Alors l'équation n'admet pas de solution.

D'où $S = \emptyset$

Tableau de signe de $2x^2-x+3$

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	$+$	

a L'ensemble des solutions de l'inéquation $2x^2-x+3>0$ est : $S =]-\infty;+\infty[$

b L'ensemble des solutions de l'inéquation $2x^2-x+3 \leq 0$ est : $S = \emptyset$

III Les systèmes de 2 équations du premier degré à 2 inconnues :

1 Résolution des systèmes :

a

On appelle système de 2 équations du premier degré à 2 inconnues toute écriture de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$,

tels que a, b, c, a', b' et c' sont des nombres déterminés et x et y sont des inconnues.

b

L'organigramme ci-dessous résume la méthode de résolution :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab'-a'b$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb'-c'b$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac'-a'c$$

si $\Delta \neq 0$: Le système admet une seule solution $(x;y)$ telle que : $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

si $\Delta = 0$

- si $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$: Le système admet une infinité solution
- si $\Delta_x \neq 0$ et $\Delta_y \neq 0$: $S = \emptyset$

• Exemple

Résolvons les systèmes suivants :

1 $\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x-5y=7 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+2y=12 \end{cases}$ 3 $\begin{cases} -x+3y=1 \\ -2x+6y=4 \end{cases}$

Solution

1 On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 1\times(-5)-4\times 2 = -5-8 = -13$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = 3\times(-5) - 7\times 2 = -15 - 14 = -29$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 1\times 7 - 4\times 3 = 7 - 12 = -5$$

Puisque $\Delta \neq 0$ alors le système admet une seule solution $(x;y)$ telle que $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{-29}{-13} = \dfrac{29}{13}$ et $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-5}{-13} = \dfrac{5}{13}$

Donc $S = \left\{\left(\dfrac{29}{13};\dfrac{5}{13}\right)\right\}$

2 On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\times 2 - 2\times 1 = 2 - 2 = 0$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 6\times 2 - 12\times 1 = 12 - 12 = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 1\times 12 - 2\times 6 = 12 - 12 = 0$$ Puisque $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$ alors le système admet une infinité de solutions.

3 On a : $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -1\times 6 - 2\times 3 = -6 + 6 = 0$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1\times 6 - 4\times 3 = 6 - 12 = -6$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -1\times 4 - (-2)\times 1 = -4 + 2 = -2$$

Puisque $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$ et $\Delta_y \neq 0$ alors le système n'admet pas de solution, $S = \emptyset$.

2 Les systèmes et la résolution des problèmes :

Pour résoudre un problème donné, on suit les étapes suivantes :

- Lire attentivement le problème et le comprendre.
- Choisir les variables convenables.
- Formuler le système.
- Résoudre le système.

• Vérifier les solutions.

• Exemple

Ahmed a acheté 13 lampes de deux types A et B avec un prix total de 510dh. Sachant qu'une ampoule de type A vaut 42dh et que celle de type B vaut 36dh, déterminer le nombre de chaque type de lampes.

Solution

Soit x le nombre de lampes de type A et y le nombre de lampes de type B.

Ahmed a acheté 13 lampes donc $x+y=13$.

Le prix total des lampes est 510dh, donc : $42x+36y=510$.

Le système devient $\begin{cases} x+y=13 \\ 42x+36y=510 \end{cases}$

Résolution du système

On a : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 42 & 36 \end{vmatrix} = 1\times 36 - 42\times 1 = 36-42 = -6$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 510 & 36 \end{vmatrix} = 13\times 36 - 510\times 1 = 468-510 = -42$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 42 & 510 \end{vmatrix} = 1\times 510 - 42\times 13 = 510-546 = -36$

Puisque $\Delta \neq 0$ alors le système admet une seule solution $(x;y)$ telle que $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = \dfrac{-42}{-6} = 7$ et $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = \dfrac{-36}{-6} = 6$

D'où $S = \{(7;6)\}$

D'où le nombre de lampes de type A est 7 et le nombre de lampes de type B est 6.

Vérification :

$$\begin{cases} 7+6=13 \\ 42\times 7+36\times 6 = 294+216 = 510 \end{cases}$$

Chapitre

Généralités sur les fonctions numériques(Rappel et compléments)

Fiche 1

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
- On habituera les élèves à déterminer les variations d'une fonction numérique à partir de sa courbe représentative tout en accordant de l'importance à la construction des courbes ; - On traitera la résolution graphique d'équations et d'inéquations de la forme : $f(x) = c$; $f(x) \leq c$; $f(x) = g(x)$; $f(x) \leq g(x)$; $f(x) < g(x)$; - On utilisera dans la limite de ce qui est disponible les calculatrices et les logiciels pour étudier des fonctions ; - Il est souhaitable de traiter des situations choisies dans d'autres domaines.	- Comparer deux expressions en utilisant différentes techniques ; - Déduire les variations ou les extrémums ou le signe d'une fonction à partir de sa représentation graphique ou à partir de son tableau de variation ; - Reconnaitre les variations des fonctions $f + \lambda$ et λf à partir des variations de la fonction f; - Utiliser la courbe représentative au le tableau de variations d'une fonction pour déterminer l'image d'un intervalle et résoudre des équations er des inéquations; - Déterminer les variations de $g \circ f$ à partir de celles de f et g

Les prés-requis	Les extensions
Généralités sur les fonctions en TCS	L'étude des fonctions

1 Fonction majorée-Fonction minorée-Fonction bornée

Activité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) < 1$
2. L'équation $f(x) = 1$ admet-elle une solution dans $\mathbb{R}$?
3. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) \geq 0$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$
5. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ 0 \leq f(x) < 1$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de D_f .

On dit que f est majorée sur I s'il existe un réel M tel que : $(\forall x \in I), f(x) \leq M$.Le réel M s'appelle un **majorant** de f sur I.

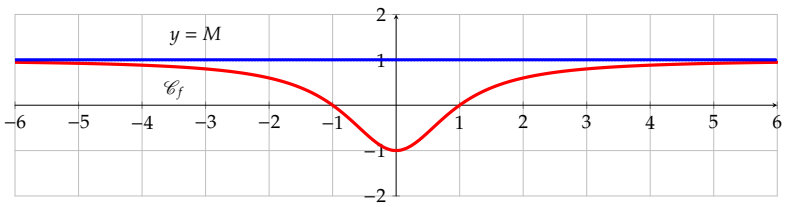
On dit que f est minorée sur I s'il existe un réel m tel que : $(\forall x \in I), f(x) \geq m$.Le réel m s'appelle un **minorant** de f sur I.

On dit que f est bornée sur I s'il existe deux réels M et m tel que : $(\forall x \in I), m \leq f(x) \leq M$

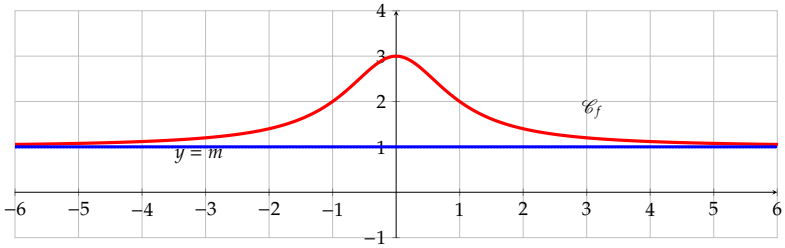
Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de D_f.
La fonction f est bornée sur l'intervalle I si et seulement s'il existe un réel positif M tel que :$(\forall x \in I), |f(x)| \leq M$

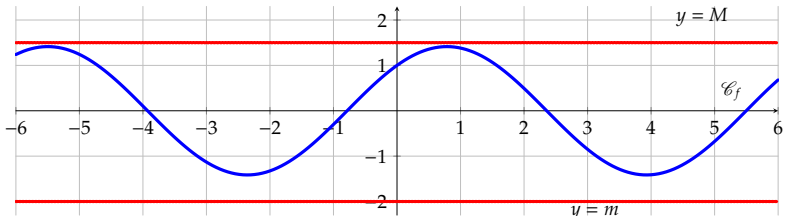
Exemple



• La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la droite d'équation $y := M$.



• La courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la droite d'équation $y := m$.



• La courbe $\mathscr{C}_f$ est inclus dans la barre définie par les droites d'équations $y = m$ et $y = M$

Application

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$

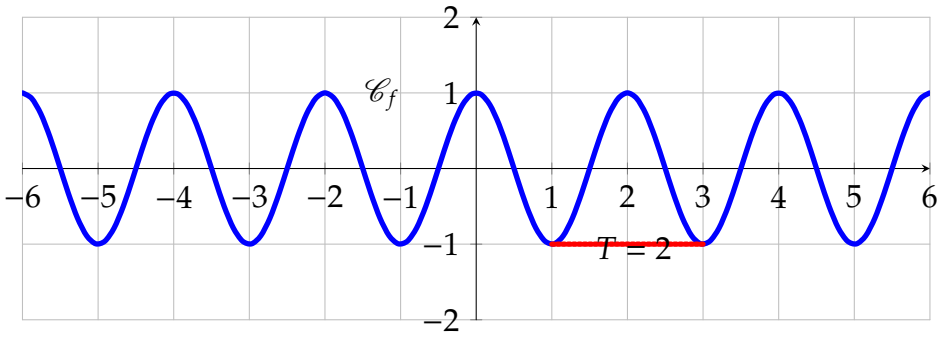
1 Montrer que f est majorée par $\frac{3}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

2 Montrer que g est minorée par 1 sur $\mathbb{R}$.

2 Fonction périodique

Activité

1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe représentative ci-dessous:



a Vérifier que : $f(1) = f(3)$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f(1) = f(3)$;

b Quelle est la relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ où $x \in \mathbb{R}$?

2 La fonction représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \cos(\pi x)$.

a Confirmer les résultats de la question **1-a)**.

b Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$; $(x-2) \in \mathbb{R}$ et $(x+2) \in \mathbb{R}$ et $f(x-2) = f(x+2) = f(x)$.**On dit dans ce cas que la fonction f est périodique de période $T = 2$**

Définition

Une fonction f est dite périodique de période T si et seulement si , pour tout réel $x \in D_f$, on a : $(x+T) \in D_f \wedge f(x+T) = f(x)$

Remarque

Si f est définie sur D_f et périodique de période T alors il suffit de l'étudier sur $D_f \cap [0;T]$ ou $D_f \cap \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]$.

Exemple

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est périodique de période $T = 2\pi$;

La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est périodique de période $T = 2\pi$;

La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est périodique de période $T = \pi$.

Application

Soit f une fonction périodique de période $T = 3$ et définie sur $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ par : $f(x) = x^2 - x$.

1. Calculer $f(2020)$ et $f(1441)$.
2. Déterminer l'expression $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Application

1. Soit a un réel strictement positif. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(ax)$ et $x \mapsto \sin(ax)$ sont périodiques et de période $T = \frac{2\pi}{a}$.
2. Déterminer la période de chacune des fonctions suivantes: $f : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$ et $g : x \mapsto \sin(2x)$

3 Extremums d'une fonction

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de D_f et $x_0 \in I$.

$f(x_0)$ est le **minimum** de f sur I si et seulement si : $(\forall x \in I), f(x) \geq f(x_0)$ et on écrit : $f(x_0) = \min\limits_{x\in I} f(x)$

$f(x_0)$ est le **maximum** de f sur I si et seulement si : $(\forall x \in I), f(x) \leq f(x_0)$ et on écrit : $f(x_0) = \max\limits_{x\in I} f(x)$.

Le maximum et le minimum sont appelés les **extremums** de la fonction f.

Application

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

1. Montrer que $\frac{1}{2}$ est une valeur maximale de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $-\frac{1}{2}$ est une valeur minimale de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4 Monotonie d'une fonction

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
- f est croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.
- f est décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.
- f est strictement croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.
- f est strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall (a;b) \in I^2), a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.
- f est monotone sur I si elle est croissante ou décroissante sur I.
- f est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante ou décroissante sur I.

4-1 Taux de variations:

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et soient a et b deux nombres distincts de l'intervalle I.
Le nombre $T(a;b) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$ s'appelle le taux de variation de la fonction f entre a et b .

Propriété

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

f est croissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) \geq 0$

f est strictement croissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) > 0$

f est décroissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) \leq 0$

f est strictement décroissante sur I si et seulement si, quels que soient les nombres distinct a et b de I on a : $T(a;b) < 0$

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f symétrique par rapport à 0 et soient $I \subset D_f \cap \mathbb{R}^+$ et I' son symétrique par rapport à 0.

Soit f paire, on a : si f est croissante sur I alors f est décroissante sur I' et si f est décroissante sur I alors f est croissante sur I'

Soit f impaire, on a : si f est croissante sur I alors f est croissante sur I' et si f est décroissante sur I alors f est décroissante sur I'

Proposition (Sens de variation de la fonction $f + \lambda$)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et λ un réel. Si f est monotone sur I alors f et $f + \lambda$ ont même sens de variation sur I.

Proposition (Sens de variation de la fonction λf)

Soit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I et λ un réel.

Si $\lambda > 0$ alors les fonctions f et λf ont même sens de variation sur I.

Si $\lambda < 0$ alors les fonctions f et λf ont des sens de variation contraires sur I.

Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2|x| + 3$

1. Montrer que la fonction f est paire.
2. Montrer que la fonction f est minorée par le nombre 2.
3. Montrer que la fonction f est croissante sur $]1; +\infty[$ et décroissante sur $[0; 1]$.
4. En déduire les variation de la fonction f sur les intervalles $]-\infty; -1]$ et $]-1; 0]$.

5 Représentation graphique des fonctions $x \longmapsto \sqrt{x+a}$ et $x \longmapsto ax^3$

Définition

La courbe représentative de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x parcourt le domaine de définition $\mathbb{D}$ de la fonction f.Elle est souvent notée C_f
L'équation de cette courbe représentative est : $y = f(x)$.
La courbe représentative de la fonction carrée s'appelle une parabole et celle de la fonction inverse une hyperbole.

5-1 Étude de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x+a}$ où $a \in \mathbb{R}$

Activité

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x+a}$ où $a \in \mathbb{R}$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer D_f.
2. Étudier les variations de f.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $a = 0$ et pour $a = 2$.
   (On remarque que la courbe $\mathscr{C}_2$ est une image de $\mathscr{C}_0$ par la translation de vecteur $-2\vec{i}$)

Propriété

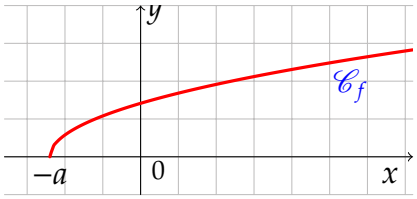
Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+a}$.

L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = [-a; +\infty[$.

La fonction f est croissante sur D_f.

Tableau de variations et représentation graphique :

x	$-a$	$+\infty$
$f(x)$		↗



5-2 Étude de la fonction $x \longmapsto ax^3$ où $a \in \mathbb{R}^*$

Activité

Soit f la fonction définie par : $f(x) = ax^3$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudier la parité de f.
2. Étudier les variations de f.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $a = 1$.

Propriété

Soit f la fonction par $f(x) = ax^3$ tel que $a \neq 0$.

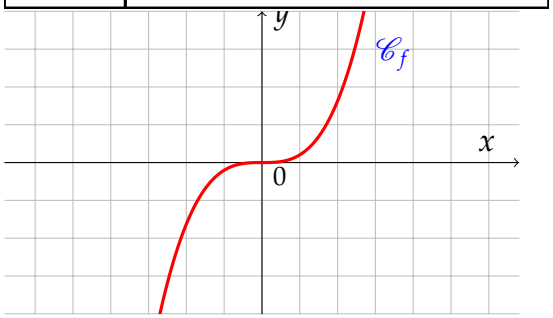
L'ensemble de définition de la fonction f est : $D_f = \mathbb{R}$.

La fonction f est impaire.

Tableau de variations et représentation graphique :

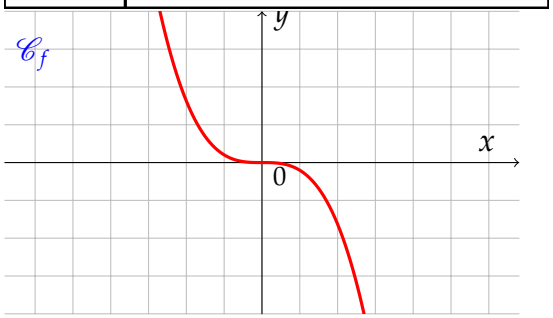
Si $a > 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0 ↗	



Si $a < 0$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0 ↘	

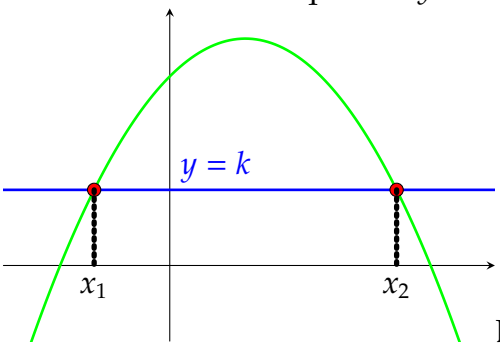


6 Comparaison de deux fonctions

6-1 Résolution d'une équation

6-1-1 Résolution d'équation $f(x) = k$

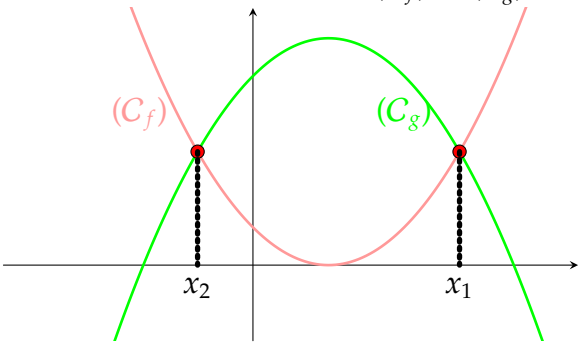
On trace la droite d'équation $y = k$ et on lit les abscisses des points d'intersection avec la courbe.



Donc l'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \{x_1; x_2\}$

6-1-2 Résolution d'équation $f(x) = g(x)$

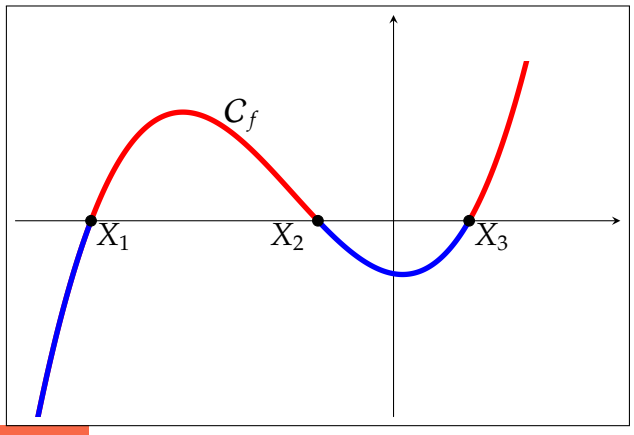
On trace les deux courbes (C_f) et (C_g) et on lit les abscisses des points d'intersection.



Donc l'ensemble des solutions de cette équation est : $S = \{x_1; x_2\}$

6-2 Résolution d'une inéquation

6-2-1 Résolution d'inéquation $f(x) > 0$



Donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est : $S =]X_1; X_2[\cup]X_3; +\infty[$

6-2-2 Résolution d'inéquation $f(x) \leq g(x)$

Activité

Soit f et g deux fonctions définies par: $f(x) = x + \dfrac{1}{x+1}$ et $g(x) = x$.

1. Déterminer D_f et D_g.
2. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
3. Comparer f et g.

Définition

Soient f et g deux fonctions. On dit que f et g sont égales et on note $f = g$ si :$D_f = D_g = D$ et $(\forall x \in D) \quad f(x) = g(x)$

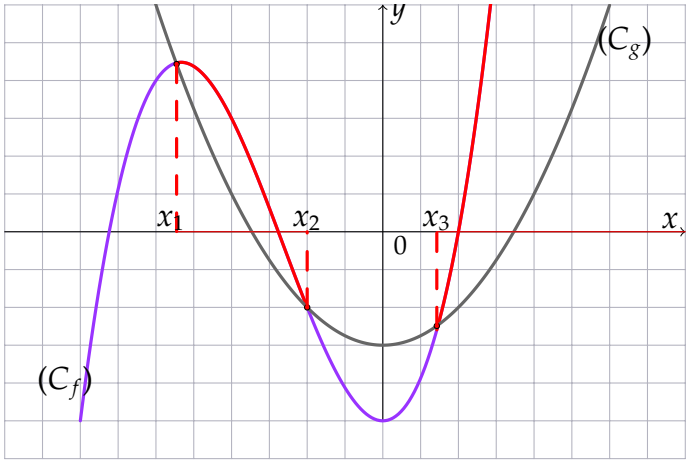
Exemple

Les fonctions u et v sont-elles égales ?

1. u et v sont définies par $u(x) = 3 - \dfrac{2}{x+1}$ et $v(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$
2. u et v sont définies par $u(x) = x$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{x}$

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I tel que $I \subset D_f \cap D_g$.
On dit que f est supérieure ou égale à g sur I si et seulement si : $(\forall x \in I) \quad f(x) \geq g(x)$



On a : $\forall x \in [x_1; x_2] \cup [x_3; +\infty[; \ f(x) \geq g(x)$
Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est: $[x_1; x_2] \cup [x_3; +\infty[$
l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est: $]x_1; x_2[\cup]x_3; +\infty[$

Remarque

L'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est un cas particulier d'inéquation $f(x) \leq g(x)$ avec g la fonction constante $g(x) = k$

Application

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 4x + 5$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Donner le tableau de variations de f et celui de g.
2. Calculer $f(3)$ et $g(3)$.
3. Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans le même repère.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \leq f(x)$.
5. Montrer que : $\forall x \in]3;+\infty[; g(x) < f(x) \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 6 > 0$
6. En déduire les solutions de l'inéquation: $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 > 0$ dans l'intervalle $]1;+\infty[$
7. Résoudre, algébriquement, dans $]1;+\infty[$ l'inéquation: $P(x) > 0$ où $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$. **(On donne** $P(3) = 0$**)**

Les suites numériques

Fiche techniques Nř3 : Les suites numériques

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
• On pourra approcher la notion de suite récurrente à travers des situations issues des différentes disciplines ; • La leçon des suites numériques constituera pour les élèves une occasion pour utiliser l'outil informatique ; • On saisira cette occasion pour utiliser le raisonnement par récurrence ; • On traitera les suites récurrentes sans excès ;	• Utiliser le raisonnement par récurrence ; • Étudier une suite numérique (majoration, minoration, monotonie) • Reconnaitre une suite arithmétiques ou géométrique et déterminer sa raison et son premier terme . • Calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétiques ou géométrique ; • Reconnaitre une situation de suite arithmétique ou géométrique ; • Utiliser une suite arithmétique ou géométrique pour résoudre des problèmes

Les prés-requis	Les extensions
• Raisonnement par récurrence . • Génerlités sur les fonctions • Propriétés des puissances	• Limite dune suite numérique. • Suite convergente ; • Suite divergente ; • Critères de convergence ; • Convergence dune suite croissante et majorée ; • Convergence dune suite décroissante et minorée ;

Présentation

La plupart des recherches dans l'histoire des mathématiques indiquent que les études faites sur certaines propriétés des nombres entiers naturels et des fractions sont à l'origine de la notion de suite. Ainsi, on trouve que les pythagoriciens se sont intéressés, depuis le cinquième siècle av-JC, aux suites arithmétiques. les suites ont été utilisées pour approcher des nombres irrationnels, comme le nombre π à qui

Archimède a donné une valeur approchée, depuis le troisième siècle av-JC, en considérant deux suites de périmètres de deux polygones réguliers (l'un inscrit, l'autre circonscrit au même cercle). Les mathématiciens musulmans, comme AL-Mahani et Al-Karaji ont contribué, eux aussi, à l'utilisation des fractions continues pour l'approche des nombres irrationnels. IL a fallu attendre le huitème siècle de notre ère pour voir installer les perceptions générales sur les suites, par les contributions de Fibonacci, Viète , Newton et Lagrange qui ont travaillé sur les approximations des solutions d'équations de degré supérieur ou égal à trois. Et c'est au début de dix-neuvième siècle que Gauss, Cauchy et Bolzano ont fait étendre leurs travaux sur les suites pour inclure une infinité de termes ; ce qui a permis à Cantor et Dedekind de définir un nombre réel comme étant la limite d'une suite. De nos jours, la notion de suite trouve de multiples applications dans de nombreux domaines notament dans les sciences de l'économie, la biologie et la physique.

I Généralité sur les suites numériques

1 Définition et Notation

Définition

On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

Remarque

Si u est une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.
- I'image de l'entier n par u se note u_n et s'appelle le terme pour l'entier n .
- L'entier n s'appelle l'indice du terme u_n
- La suite numérique u se note : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$.

2 Mode Usuels de génération d'une suite numérique

Une suite numérique peut être définie de deux manières différentes :

a

Définition

Une suite (u_n) est définie de façon explicite si le terme général u_n sexprime en fonction de n :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$.

• Exemple

$u_n = 3n+2$; $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n+1}$; $v_n = \sqrt{n^2+1}$; $w_n = \dfrac{\sin(n)}{n+1}$

b

Définition

Lorsque le terme général un dépend du ou des terme(s) précédent(s), on définit alors la suite par une relation de récurrence et par un ou plusieurs premier(s) terme(s).
La suite est dite récurrente à un terme si u_n ne dépend que du terme précédent.

$$u_0 \quad et \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

La suite est dite récurrente à deux termes si un dépend des deux termes qui le précèdent.

$$u_0 \quad , \quad u_1 \quad et \quad u_{n+1} = f(u_n, u_{n+1})$$

• Exemple

- Suites récurrente du premier ordre

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n + 3}{2v_n + 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} w_0 = -4 \\ w_{n+1} = \sqrt{2w_n^2 + 3} \end{cases}$$

- Suites numériques du second ordre.

$$\begin{cases} u_0 = 2; u_1 = -1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = -2, v_1 = \dfrac{-1}{2} \\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n + 2} \end{cases}$$

Remarque

II faut bien écrire les indices : u_{n+1} n'est pas $u_n + 1$

3 Suite majorée - suite minorée - suite bornée

Activité

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1. Calculer les 3 premiers termes.
2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n \geq 0)$
3. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n \leq 2)$

Définition

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. (I $\subset \mathbb{N}$)
⋆ On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \in I) \quad (u_n \leq M)$.
⋆ On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \in I) \quad (u_n \geq m)$.
⋆ On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Propriété

Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel positif α tel que $(\forall n \in I) \quad (|u_n| \leq \alpha)$

4 Monotonie d'une suite

Activité

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$ Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad u_{n+1} \geq u_n$

Définition

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. $(I \subset \mathbb{N})$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si : $\left(\forall (n,p) \in I^2\right)(n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si : $\left(\forall (n,p) \in I^2\right)(n \geq p \Rightarrow u_n \leq u_p)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante sur I.

T **Théorème**

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique. (I $\subset \mathbb{N}$)
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si et seulement si : $(\forall n \in I)\,(u_{n+1} \geq u_n)$ (P)
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si et seulement si : $(\forall n \in I)\,(u_{n+1} \leq u_n)$

Exemples

• On suppose que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante donc $\left(\forall (n,p) \in I^2\right)(n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p)$ d'où (et puisque $n+1 \geq n$) alors : $u_{n+1} \geq u_n$
• On suppose que la suite $(u_n)_{n\in I}$ vérifie la propriété (P). Soit n et p deux entiers tels que $n \geq p$ on a : $u_p \leq u_{p+1} \leq \cdots \leq u_{n-1} \leq u_n$ donc la suite : $(u_n)_{n\in I}$ est croissante.

Application

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 1}{2u_n + 3} \end{cases}$ Montrer que $(u_n)_n$ est minorée par 1 et majorée par 3.

II Suite arithmétique, Suite géométrique

1 Suite arithmétique

a

Activité

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\left(u_n = \dfrac{3n+1}{2}\right)$ Soit n un entier naturel, calculer : $u_{n+1} - u_n$

Définition

On appelle suite arithmétique toute suite $(u_n)_{n\in I}$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $(\forall n \in I) \quad u_{n+1} = u_n + r$ où r est un réel fixe.
Le réel r s'appelle la raison de la suite $(u_n)_{n\in \mathrm{I}}$.

• Exemple

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ la suite $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de premier terme $u_0 = 2$ Le premier terme et la raison d'une suite arithmétique s'appellent aussi les éléments de la suite arithmétique.

b

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes. Soit n un entier naturel on a :

$$\begin{aligned} u_{p+1} &= u_p + r \\ u_{p+2} &= u_{p+1} + r \\ &\vdots \\ u_n &= u_{n-1} + r \\ u_n &= u_p + \underbrace{r + r + \cdots + r}_{(n-p) \text{ termes}} \end{aligned}$$

En faisant la somme membre à membre on obtient : D'où : $u_n = u_p + (n-p)r$

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes, on a :

$$(\forall n \in I) : u_n = u_p + (\text{ n - p }) \text{ r }.$$

Application

(1) Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que $u_{15} = 375$ et $u_{20} = 520$

1. Déterminer sa raison r
2. Déterminer son premier terme u_0

(2) Soit $(w_n)_n$ tel que : $\begin{cases} w_6 + w_9 + w_{13} = 192 \\ w_4 + w_{15} = 130 \end{cases}$ Déterminer son terme w_{30}

Remarque

Si u_0 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n = u_0 + nr)$
Si u_1 est le premier terme d'une suite arithmétique de raison r alors : $(\forall n \in \mathbb{N})\,(u_n = u_1 + (n-1)r)$

c

Propriété

Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique, p un entier naturel et $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$
On a : $S = \dfrac{(n-p+1)}{2}[u_p + u_n]$

Exemples

Soient $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison, p un entier naturel et $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ On a : d'après le terme général d'une suite arithmétique : $(\forall n \in I)\,(u_n = u_p + (n-p)r)$ D'où :

$$u_p = u_p$$

$$u_{p+1} = u_p + r$$
$$u_{p+2} = u_p + 2r$$

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

En faisant la somme membre $S = \underbrace{(u_p + u_p + \cdots + u_p)}_{(n-p+1)\text{ termes}} + r(1 + 2 + \cdots + (n-p))$

D'où :

$$\begin{aligned} S &= (n-p+1)u_p + r \times \frac{(n-p)(n-p+1)}{2} \\ &= \frac{(n-p+1)}{2}[2u_p + (n-p)r] \\ &= \frac{(n-p+1)}{2}[u_p + (u_p + (n-p)r)] \end{aligned}$$

En remarquant que : $u_n = u_p + (n-p)r$ Finalement : $S = \dfrac{(n-p+1)}{2}[u_p + u_n]$

d

Soient a, b et c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r on a donc :

$$\begin{cases} b = a + r \\ c = b + r \end{cases}$$

En faisant la différence membre à membre on obtient : $b - a = c - b$ par suite : $2b = a + c$
Inversement : si a, b et c sont trois réels tels que $2b = a + c$ alors $b - a = c - b$
Et par suite, a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = b - a$

Propriété

a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si $2b = a + c$

Application

Déterminer le réel x pour que les nombres $(3x-1); (1-4x)$ et $(x-5)$ soient les termes consécutifs d'une suite arithmétique pour laquelle il faut déterminer la raison.

2 Suite géométrique

a

Définition

On appelle suite géométrique toute suite $(v_n)_{n\in I}$ définie par son premier terme et par la relation récurrente : $(\forall n \in I) \quad v_{n+1} = qv_n$ où q est un réel fixe.
Le réel q s'appelle la raison de la suite $(v_n)_{n\in I}$

• Exemple

$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2} \end{cases}$ la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 2$

Le premier terme et la raison d'une suite géométrique s'appellent aussi les éléments de la suite géométrique.

b

Soit $(v_n)_{n\in I}$ une suite géométrique de raison q ; et p un entier naturel on a :

$$v_{p+1} = q \times v_p$$
$$v_{p+2} = q \times v_{p+1}$$
$$\vdots$$
$$v_n = q \times v_{n-1}$$
$$v_n = q \times q \times \ldots \times v_p \text{(n-p) f o i s}$$
$$\text{d'où } v_n = q^{n-p} \times v_p$$

En faisant les produits membre à membre on obtient :

Propriété

Si $(v_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q et si p est un entier naturel alors :
$(\forall n \in I) \quad v_n = q^{n-p} \times v_p$

Cas particuliers :
⋆ La suite commence à u_0.
Pour obtenir le terme suivant, en fonction du précédent, on multiplie par q.
Pour obtenir u_n on a multiplié n fois par q à partir de u_0. On a donc : $(\forall n \in I) \quad v_n = q^n \times v_0$
⋆ La suite commence à u_p.
De u_p à u_n on a multiplié $n-p$ fois par q, donc $(\forall n \in I)\,(v_n = q^{n-p} \times v_p)$

c

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q, et v_p l'un de ses termes. soit $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$
Si $q = 1$ tous les v_i sont égaux et $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = \underbrace{v_p + v_p + \cdots + v_p}_{(n-p+1)\text{ termes}} = (n-p+1)v_p$

Si $q \neq 1$ On a : $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$
Donc :

$$\begin{aligned} qS &= qv_p + qv_{p+1} + \cdots + qv_n \\ &= v_{p+1} + v_{p+2} + \cdots + v_{n+1} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} S - qS &= \left(v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n\right) - \left(v_{p+n} + v_{p+2} + \cdots + v_{n+1}\right) \\ &= v_p - v_{n+1} \\ &= v_p - q^{n-p+1}v_p \\ &= v_p\left(1 - q^{n-p+1}\right) \end{aligned}$$

Donc : $S(1-q) = v_p\left(1 - q^{n-p+1}\right)$
Finalement : $S = v_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Propriété

Soient $(v_n)_{n\in I}$ une suite géométrique de raison q, et v_p l'un de ses termes. soit $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$
- Si $q = 1$ alors : $S = (n-p+1)v_p$
- Si $q \neq 1$ alors : $S = v_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

d

Propriété

a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $b^2 = a \times c$

EXEMPLES

Devoir Maison .

Application

Déterminer le réel x pour que les nombres : $(1+x^2)\,;(3+x)$ et 10 soient les termes consécutifs d'une suite géométrique dans cet ordre et déterminer sa raison.

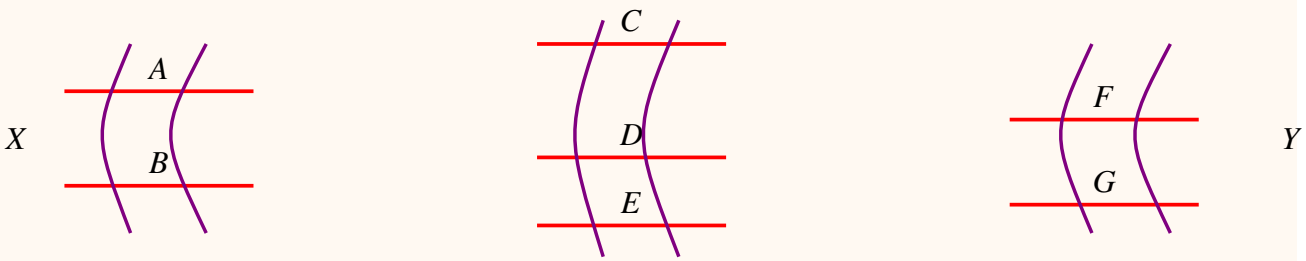
Chapitre

Dénombrement

I Principe général du dénombrement

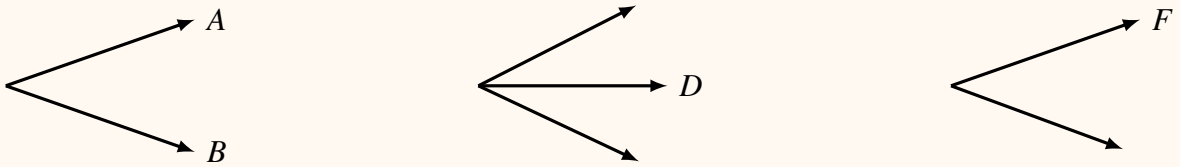
Activité

Une personne veut atteindre le point Y à partir du point X par le passage de trois vallées comme le montre la figure ci-dessous :



L'écriture ADF signifie que cette personne est passée par le pont A, le pont D puis le pont F.

1 Compléter l'arbre suivant, puis déduire l'ensemble des chemins menant au point Y.



2 Calculer le nombre de chemins que cette personne pourrait emprunter pour atteindre le point Y.

Définition

Soit p choix. Si le premier choix se fait de n_1 manière différente et le second choix se fait de n_2 manière différente ... et le p^{ieme} choix se fait de n_p manière différente, alors le nombre de façons dont tous ces choix sont faits est :

$$n = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$$

• Exemple

On considère les chiffres suivants : 1;3;4;5;7 et 8.
On veut former un code de 3 chiffres distincts deux à deux parmi les chiffres précédents.
Le nombres des choix du premier chiffre est : 6.
Le nombres des choix du second chiffre est : 5.
Le nombres des choix du troisième chiffre est :4.

Donc d'après le principe général de dénombrement le nombre de codes possibles est : $6.5.4 = 120$

• Exemple

Une personne possède trois chemises, deux cravates et trois pantalons.
Déterminons le nombre de costumes que cette personne peut porter. (Chaque costume se compose d'une chemise, d'une cravate et d'un pantalon)

II Arrangement et Permutation

Activité

On veut ranger, cinq objets notés $1,2,3,4$ et 5 dans trois tiroirs notés A,B et C.

1. Combien de rangements différents peut-on réaliser ?
2. Combien de rangements où l'objet 1 est placé dans le tiroir A ?
3. Combien de rangements sont effectués dans deux tiroirs ?
4. Combien de rangements différents peut-on réaliser si on dispose de 5 tiroirs A,B,C,D et E ?

Propriété

Soient p et n deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$. On note le nombre des arrangements de p éléments parmi n par : A_n^p. Et on a : $A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$.

Remarque

- Par convention : $A_n^0 = 1$.
- L'ordre est important dans tout arrangement.

• Exemple

Calculer A_5^3 ; A_9^4 ; A_7^1 ; A_6^6.

Application

Combien de nombre de trois chiffres peut-on écrire avec les chiffres $1,3,5,7$ et 9 tous distincts ?

Application

On veut former des mots à deux lettres distinctes, avec les lettres A,B,C,D,E et F.
Déterminer le nombre de mots possibles.

Application

Un parking comporte sept places libres repérées par les numéros 1 à 7.
De combien de façons peut-on garer :

1. Une voiture ?
2. Trois voitures ?
3. Sept voitures ?

Définition

Soit n un entier naturel. Tout arrangement de n éléments parmi n éléments est appelé une permutation.
On note le nombre de permutations de n par : $n!$. Et on a : $n! = A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$.

Remarque

- Par convention : $0! = 1$.
- $n!$ se lit 'factorielle n'

• Exemple

1. $3! =$
2. $\frac{5!}{2!} =$

Application

Trois amis se photographient en changeant de places (un au milieu, un à sa droite et l'autre à sa gauche).
De combien de façons différentes peuvent ils se placer pour la photo ?

Application

Comparer A_7^5 et $\frac{7!}{(7-5)!}$.

Propriété

Pour tout entier n et tout entier p tel que : $1 \leq p \leq n$ On a : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

III Combinaison

Activité

Un groupe se compose de quatre personnes :

$$E = \{a;b;c;d\}.$$

Nous voulons former un comité de trois personnes pour effectuer une tâche.

1 Déterminer les comités qu'on peut former.

2 Calculer $\frac{A_4^3}{3!}$. Conclure.

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble fini de n éléments et p un entier vérifiant : $1 \leq p \leq n$ On appelle combinaison de p éléments parmi n éléments de E toute partie de E possédant p éléments. Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est égal à C_n^p et on a : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\times(n-p)!}$.

Remarque

- $C_n^0 = 1$. - C_n^p représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n (L'ordre n'est pas important et il n'y a pas de répétition)

• Exemple

Calculer : C_3^2 ; C_5^2 ; C_7^7.

Activité

Dans une classe est composée de 4 filles et 6 garçons. Le professeur voulait choisir 3 élèves pour faire un exposé.

1 Déterminer le nombre de groupes que le professeur peut créer.

2 Déterminer le nombre de groupes composés par les garçons uniquement.

3 Déterminer le nombre de groupes qui contiennent deux filles exactement.

4 Déterminer le nombre de groupes qui contiennent au moins un garçon.

5 Déterminer le nombre de groupes qui contiennent aux plus trois filles.

IV Type de tirage

On tire p éléments parmi n.

Type de Tirage	Nombre de tirages possible	L'ordre
Simultané	C_n^p	Pas important
Successif sans remise	A_n^p	Important
Successif avec remise	n^p	Important

V Principe de la somme

Activité

On considère les ensembles suivants : $A = \{4,6,8,10,12\}$ et $B = \{3,4,5,7,12\}$.

1. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$. On note le nombre d'éléments d'un ensemble E par $\text{card}(E)$ et se lit ń cardinal de E ż.
2. Déterminer $\text{card}(A), \text{card}(B), \text{card}(A \cap B)$ et $\text{card}(A \cup B)$.
3. Comparer $\text{card}(A \cup B)$ et $\text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Propriété

Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E. $\text{card}(\emptyset) = 0$ $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Remarque

Si $A \cap B = \emptyset$, alors :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$$

Application

Dans une faculté, il y a 1000 étudiants, dont 400 étudient l'anglais et 750 étudient l'espagnol. Déterminer le nombre d'étudiants qui étudient l'anglais et l'espagnol.

I La limite d'une fonction au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

1 Limite infinie à l'infinie

Activité

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^3$.
En utilisant une calculatrice compléter le tableau suivant :

x	10^3	10^5	10^7	10^8	10^9
$f(x)$	.....	.....	.....	.....	.....

Remarque

On voit que lorsque x prend des valeurs possitives plus grandes $f(x)$ prend des valeurs possitives plus grandes .
On dit que lorsque x tend vers $+\infty$; $f(x)$ tend vers $+\infty$.
On dit aussi que $+\infty$ est la limite de f quand x tend vers $+\infty$;
et on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
de même on peut remarquer que lorsque x prend des valeurs négatives plus grandes $f(x)$ prend des valeurs négatives plus grandes .
on écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Propriété

En général ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a :

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty; & \text{si n est pair} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty; & \text{si n est impair} \end{cases}$$

• Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^7 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^7 = -\infty$.

2 Limite finie à l'infinie

Activité

On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{1}{x}$.
En utilisant une calculatrice compléter le tableau suivant :

x	10^3	10^5	10^7	10^8	10^9
$g(x)$	.....	.....	.....	.....	.....

Remarque

On voit que lorsque x prend des valeurs possitives plus grandes $g(x)$ soit égale presque 0 .
On dit que lorsque x tend vers $+\infty$; les valeurs de $g(x)$ tends vers 0 .
On dit aussi que 0 est la limite de g quand x tend vers $+\infty$;
et on écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$
De même on peut remarquer que lorsque x prend des valeurs négatives plus grandes $g(x)$ soit égale presque 0 .
On écrit : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

Propriété

En général ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

• Exemple

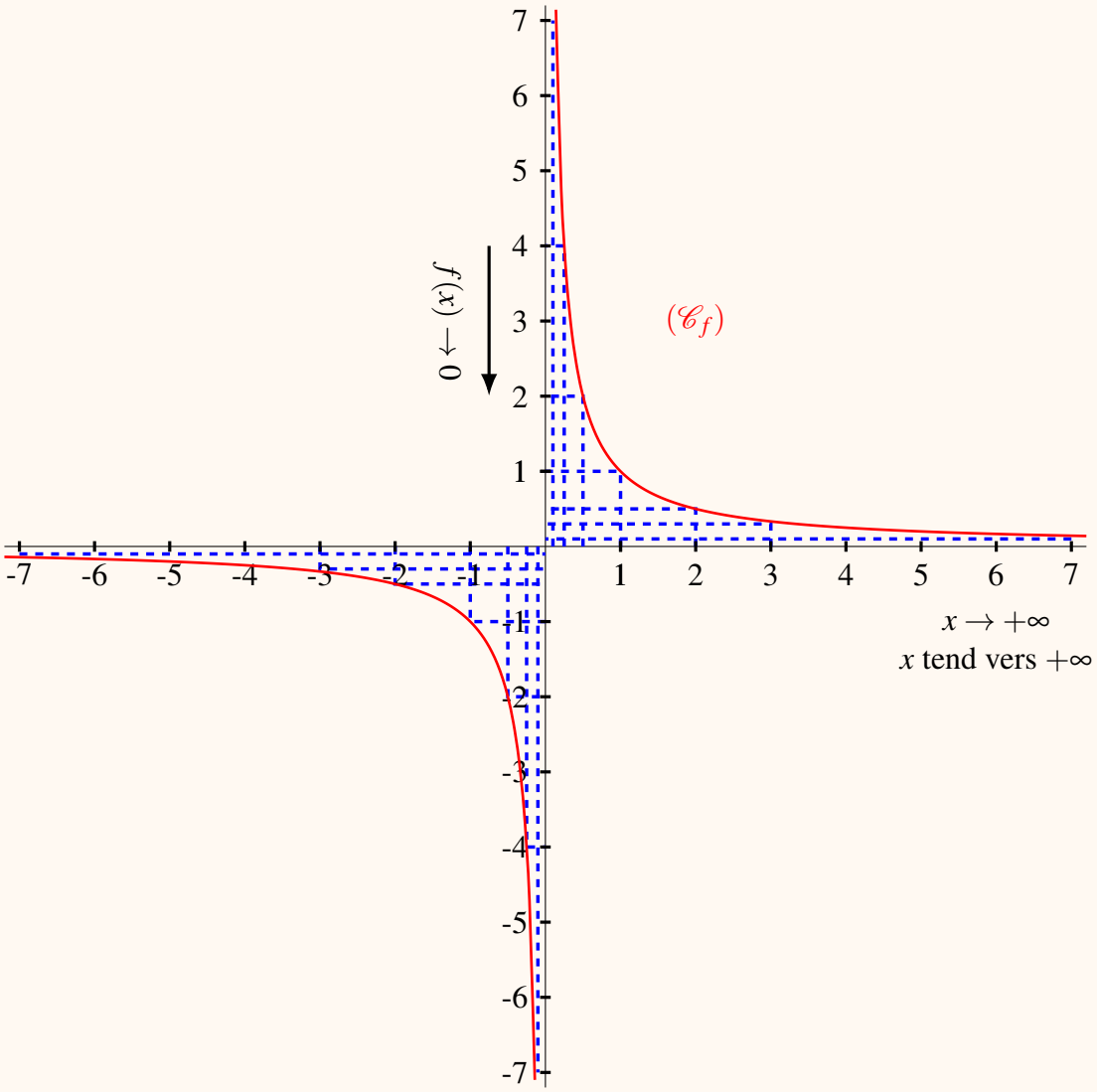
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^5} = 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^4} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^5} = 0$.

II La limite d'une fonction en un point

Activité

Ci-dessous la représentation de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$.



Choisir la bonne réponse :

⋆ Quand x prend des valeurs très proches de 0 de côté droite :

- ○ La courbe de f monte plus haut.
- ○ La courbe de f descend plus bas.

⋆ Quand x prend des valeurs très proches de 0 de côté gauche :

- ○ La courbe de f monte plus haut.
- ○ La courbe de f descend plus bas.

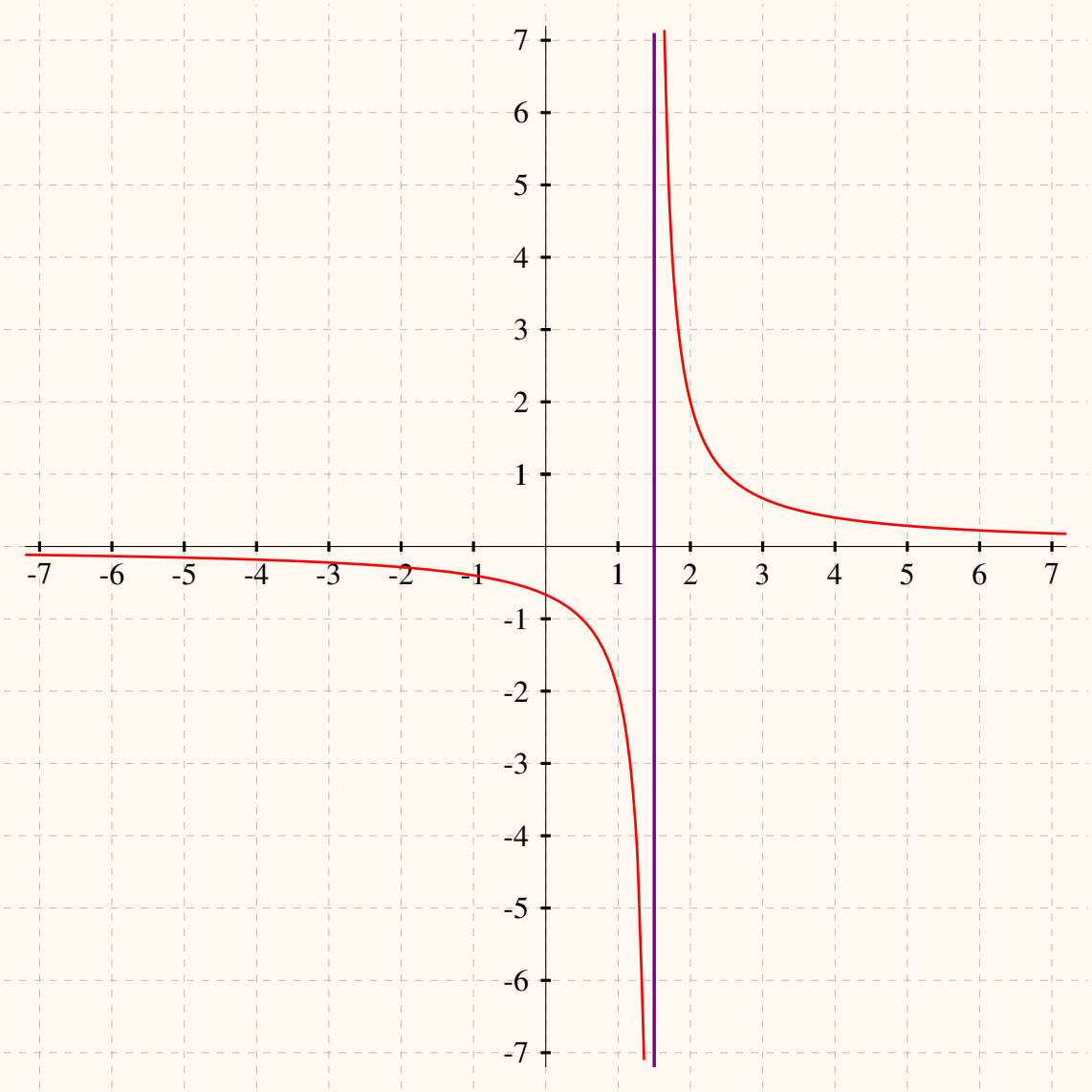
Remarque

⋆ Lorsque x tend vers 0 à droite ; la courbe de f monte en haut (les valeurs de $f(x)$ prennent des valeurs positives plus grandes). on dit que $f(x)$ tends vers $+\infty$;
Et on écrit : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ou bien $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$

⋆ Lorsque x tend vers 0 à gauche ; la courbe de f descend en bas (les valeurs de $f(x)$ prennent des valeurs négatives plus grandes) . $f(x)$ tends vers $-\infty$;
On écrit : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ ou bien $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$.

Activité

Ci-dessous la représentation de la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$



Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$

Propriété

En général ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty; & \text{si n est pair} \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty; & \text{si n est impair} \end{cases}$$

• Exemple

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty; \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty; \quad \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty; \quad \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{(x-4)^3} = -\infty.$$

III Opérations sur les limites

Propriété

On admet toutes les opérations suivantes.
Dans ce qui suit, f et g deux fonctions ; ℓ et ℓ' sont deux nombres réels.
Soit a un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Ces opérations restent valables pour les limites à droite et à gauche en a.
L'abréviation * *F.I* * signifie * Forme indéterminée *, c'est-à-dire qu'on ne peut pas déterminer la limite immédiatement et tout résultat est possible.

1 LIMITE D'UNE SOMME DE DEUX FONCTIONS

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I*

2 LIMITE D'UN PRODUT DE DEUX FONCTIONS

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x)$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

3 LIMITE D'UN QUOTIENT DE DEUX FONCTIONS

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou 0^-	$\ell>0$ ou 0^+	$\ell<0$ ou 0^-	$\ell<0$ ou 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I

4 LIMITE DE L'INVERSE D'UNE FONCTION

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Remarque

Les formes indéterminées : "$\infty-\infty$", "$0\times\pm\infty$", "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$".
Forme indéterminée désigne qu'on ne peut pas calculer la limite directement ; alors il faut utiliser d'autre méthodes par exemple (la factorisation - la division euclidienne -

le conjugué- ...)

• Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+6=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-8=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^4=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^4=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -5x^4=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} -5x^4=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^7=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^7=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-7}{x^4}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{27}{x^3}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{9}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5}{4}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to5^+} \dfrac{-7}{x-5}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to6^+} \dfrac{53}{x-6}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{7}{x+2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{-4}{5x-15}=+\infty$.

Propriété

Soit f une fonction numérique ; P et Q deux fonctions polynômiales et a un réel :

1. $\lim\limits_{x\to a} P(x)=P(a)$
2. Si $Q(a)\neq 0$; alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(a)}{Q(a)}$
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ (terme de plus haut degré de P))
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\text{(terme de plus haut degré de } P)}{(\text{ terme de plus haut degré de } Q)}$

• Exemple

Déterminons les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3+6x-7$; $\lim\limits_{x\to+\infty} -7x^2+9$; $\lim\limits_{x\to4} 9x^2+6$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x^4+x^2-7}{x^3-2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^2+x-17}{x^2-6}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^2+x}{x^5-9}$.

$\lim\limits_{x\to2} 2x^3+6x-7$; $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{5x^2+x-3}{x+6}$; $\lim\limits_{x\to6^-} \dfrac{x+4}{2x-12}$.

Chapitre

La dérivation

Les orientations pédagogiques 1	Capacités attendues
► Nombre dérivé dune fonction en un point x_0 ; interprétation géométrique du nombre dérivé ; droite tangente à une courbe en un point ; ► Équation cartésienne de la droite tangente ; ► Dérivabilité sur un intervalle ; fonction dérivée ; ► Dérivation des fonctions : $x \to a$, $x \to ax$ et nx^n ; ► Dérivation des fonctions : $f \to g$, f', fg, f'', f/g et $(f^n)'$ (n entier) ; ► Monotonie dune fonction et signe de sa dérivée ; extrémums dune fonction dérivable sur un intervalle. ► Reconnaitre que le nombre dérivé dune fonction en $0x$ est le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point dabscisse ox ;	► Reconnaitre la dérivabilité des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles ; ► Déterminer léquation de la tangente à une courbe en un point donné et la construire ; ► Déterminer la monotonie dune fonction à partir de létude du signe de sa dérivée ; ► Résoudre des problèmes dapplication sur les valeurs minimales et les valeurs maximales ; ► Déterminer le signe dune fonction à partir de son tableau de variations ou de sa représentation graphique.

I Le nombre dérivé en un point

1 Activité et définition

Activité

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x+2$

1. Calculer : $f(1)$
2. Déterminer : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$
3. Calculer : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

Solution :

1. on a : $f(1) = 3\times 1+2 = 3+2 = 5$
2. $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{3x+2-5}{x-1} = \dfrac{3x-3}{x-1} = \dfrac{3(x-1)}{x-1} = 3$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3(x-1)}{x-1} = 3$

Définition

Soit f une fonction et $a \in D_f$: On dit que la fonction f est dérivable en le nombre : a si la limite : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est finie. cette limite s'appelle Le nombre dérivé de la fonction f en a on le note par : $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Propriété

Soit f une fonction dérivable en un point a : L'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse a est : $(T) : y = f'(a)(x-a)+f(a)$

• Exemple

Par exemple $a = 1$: alors l'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse 1 est : $(T) : y = f'(1)(x-1)+f(1)$ Exemple 7.1 Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2$ Pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse 1 : - Premièrement : Calculons : $f(1)$ et $f'(1)$: on a : $f(1) = 1^2 = 1$ et

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 1+1 = 2$$

- Deuxièmement : L'équation de la tangente à la courbe de f en le point d'abscisse 1 est : $(T) : y = f'(1)(x-1)+f(1)$ c'est à dire : $(T) : y = 2(x-1)+1$ c'est à dire : $(T) : y = 2x-1$ La construction de la courbe s'il est demandé :

Application

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en le point d'abscisse a dans les cas suivants :

1 $f(x)=x^2+x;\quad a=0$

2 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x+1;\quad a=0$

3 $f(x)=\frac{x}{x-1};\quad a=2$

Solution :

1 on a : $f(x)=x^2+x$ donc : $f(0)=0$ et :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}x+1=0+1=1$$

L'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 est :
$(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$ c'est à dire : $(T):y=1(x-0)+0$ c'est à dire : $(T):y=x$

II Les opérations sur les fonctions dérivées

1 La fonction dérivée

Définition

On dit que la fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I si f est dérivable en tous les points de I. et la fonction définie par :

$$f':I\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto f'(x)$$

s'appelle la dérivée de la fonction f sur I on le note par f'.

2 La dérivation de quelques fonctions usuelles

Soient a et b deux nombres réelles :

La fonction $x\mapsto f(x)$	La fonction $x\mapsto f'(x)$	L'ensemble de définition D_f
La fonction constante $x\mapsto f(x)=a$ avec $(a\in\mathbb{R})$	La fonction nulle $x\mapsto f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto f(x)=ax$ avec $(a\in\mathbb{R})$	$x\mapsto f'(x)=a$ avec $(a\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f'(x)=2x$	$x\mapsto f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto f(x)=x^n$ avec $(n\in\mathbb{N}^*)$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$	$\mathbb{R}$
$x\mapsto f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$

• Exemple

1 Si : $f(x) = 3x$ alors : $f'(x) = 3$
2 Si : $f(x) = 4x + 1$ alors : $f'(x) = 4$
3 Si : $f(x) = 5$ alors : $f'(x) = 0$
4 Si : $f(x) = x^4$ alors : $f'(x) = 4x^3$
5 Si : $f(x) = x^5$ alors : $f'(x) = 5x^4$
6 Si : $f(x) = x$ alors : $f'(x) = 1$

3 Les opérations sur les fonctions dérivables

Ce tableau récapitule différentes opérations sur les fonctions et leurs dérivées respectives. Par exemple, si vous avez deux fonctions f et g, la dérivée de leur somme est égale à la somme des dérivées individuelles $(f' + g')$. De même, la dérivée du produit de f(x) et g(x) est donnée par la formule $(f'g + fg')$. Vous trouverez également les dérivées pour d'autres opérations telles que l'inverse, le quotient, le carré et la puissance.

Les opérations	La fonction $x \mapsto f(x)$	La fonction $x \mapsto f'(x)$	La condition
La somme	$f+g$	$(f+g)' = f' + g'$	.....
La multiplication par un nombre	$k \cdot f$ avec $k \in \mathbb{R}$	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$	.....
Le produit	$f \times g$	$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$	.....
L'inverse	$\frac{1}{f}$	$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$	$f \neq 0$
La quotient	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$g \neq 0$
Le carré	f^2	$(f^2)' = 2 \cdot f' \cdot f$	.....
La puissance	f^n	$(f^n)' = n \cdot f' \cdot f^{n-1}$	.....

4 Les variations dune fonction et le signe de la dérivée

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors :
Si la dérivée f' est positive sur I, alors la fonction f est croissante sur I.
Si la dérivée f' est négative sur I, alors la fonction f est décroissante sur I.

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors :
Si la dérivée f' est strictement positive sur I, alors la fonction f est strictement croissante sur I. Si la dérivée f' est strictement négative sur I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors :
Si la dérivée f' est nulle sur I, alors la fonction f est constante sur I.

• Exemple

Considérons la fonction $f(x) = x^2$.
- Le signe de la dérivée de $f(x)$: La dérivée de $f(x)$ est $f'(x) = 2x$. Elle est positive pour tout $x > 0$ et négative pour tout $x < 0$.
⋆ Conclusion : La fonction $f(x)$ est croissante sur $(-\infty, 0)$ et $(0, +\infty)$.

• Exemple

Considérons la fonction $g(x) = -3x^3 + 2x^2 - 5x + 1$.
- Le signe de la dérivée de $g(x)$: La dérivée de $g(x)$ est $g'(x) = -9x^2 + 4x - 5$. Elle est positive pour certains intervalles et négative pour d'autres, dépendant des solutions de $g'(x) = 0$. Par exemple, $g'(x) > 0$ pour $x < -1$ et $x > \frac{5}{9}$, et $g'(x) < 0$ pour $-1 < x < \frac{5}{9}$.
⋆ Conclusion : La fonction g est décroissante sur $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$, et croissante sur $[-1, 1]$. Elle est concave vers le bas sur certains intervalles et concave vers le haut sur d'autres.

Application

Considérons la fonction $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 1$.
a) Déterminez les intervalles où la fonction $f(x)$ est croissante et décroissante.
b) Calculez la dérivée $f'(x)$ et étudiez le signe de $f'(x)$.
c) Déterminez les intervalles où la fonction $f(x)$ est concave vers le haut et concave vers le bas.

Chapitre

Étude et représentation graphique d'une fonction

Cours 1BSHL

Les orientations pédagogiques	Capacités attendues
• On admettra les branches infinies de la courbe d'une fonction polynôme de troisième degré. • On s'intéressera à la résolution graphique des équations et des inéquations de la forme $f(x) = c$ et $f(x) \leqslant c$, f étant une fonction figurant au programme, dans le cas où la résolution algébrique n'est pas à la portée des élèves.	• Utiliser les éléments de symétrie de la courbe d'une fonction pour réduire son domaine d'étude. • Représenter graphiquement des fonctions polynômes de degré deux ou trois et des fonctions homographiques. • Utiliser la représentation graphique d'une fonction ou son tableau de variations pour étudier les solutions de certaines équations et inéquations

Contenu du programme	Les prés-requis
• Axe de symétrie, centre de symétrie. • Asymptote horizontale ; asymptote verticale. • Exemples d'étude et de représentation des fonctions : $x \longmapsto ax^2+bx+c$; $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $x \longmapsto ax^3+bx^2+cx+d$	• Fonctions affines et linéaires • Fonctions polynômiales • Ensemble de définition d'une fonction • Équations et inéquations

I Asymptote verticale et asymptote horizontale

1 Asymptote verticale

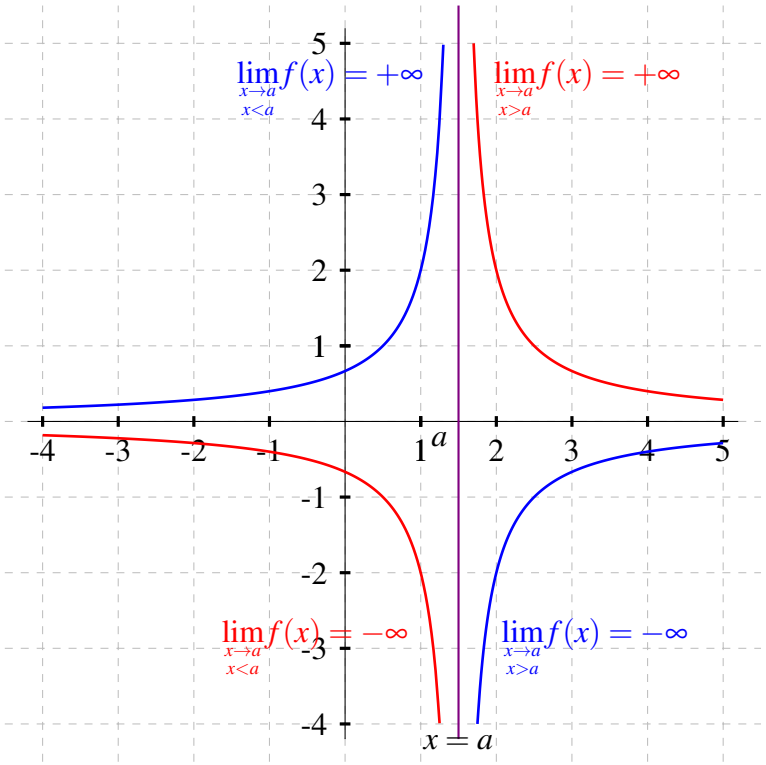
Propriété

Soit f une fonction numérique et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et a un réel .

Si : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=\pm\infty$

On dit que la droite d'équation : $x=a$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f)

L'interprétation géométrique :



• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{3x+7}{x-1}$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3x+7\\x>3x+7}} \dfrac{3x+7}{x-1}=+\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} 3x+7=10$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} x-1=0^+$

Et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} \dfrac{3x+7}{x-1}=-\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} 3x+7=10$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} x-1=0^-$

Donc la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f)

2 Asymptote horizontale

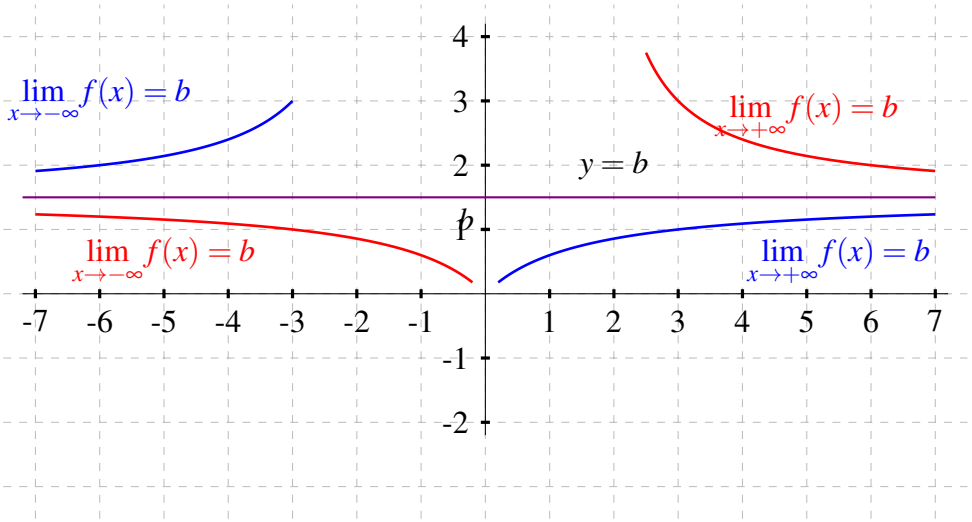
Propriété

Soit f une fonction numérique et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et b un réel .

: • Si : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, alors, on dit que la droite d'équation : $y=b$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

: • Si : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, alors, on dit que la droite d'équation : $y=b$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

L'interprétation géométrique :



• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

Donc la droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

Exercice

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2 Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$

Puis déduire les équations des asymptotes de la courbe (C_f)

3 En déduire les asymptotes de la courbe (C_f)

II Élément de symétrie d'une courbe d'une fonction

1 Axe de symétrie

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

On a dit que la droite d'équation $x=a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) :

si et seulement si : $\begin{cases}(\forall x\in\mathbb{D}_f):(2a-x)\in D_f\\(\forall x\in\mathbb{D}_f):f(2a-x)=f(x)\end{cases}$

Remarque

- Si la droite $(D):x=a$ est l'axe de symétrie de la courbe de la fonction numérique f, son étude peut se restreindre à l'ensemble $D_f\cap[a;+\infty[$
- Une fonction f est paire si et seulement si la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est l'axe de symétrie de la courbe de la fonction f

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^2-x+2$

Montrons que la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie de (C_f) la courbe de f

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{2}{3}x^2-5$

Montrons que la fonction f est impaire , en déduire son domaine d'étude

2 Centre de symétrie

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

On a dit que Le point $\Omega(a;b)$ $(a\in\mathbb{R};b\in\mathbb{R})$ est un centre de symétrie de la courbe $(_f)$:

si et seulement si : $\begin{cases}(\forall x\in\mathbb{D}_f):(2a-x)\in D_f\\(\forall x\in\mathbb{D}_f):f(2a-x)+f(x)=2b\end{cases}$

Remarque

- Si le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction numérique f, son étude peut se restreindre à l'ensemble $D_f\cap[a;+\infty[$
- Une fonction f est impaire si et seulement si le point $O(0;0)$ (l'origine du repère) est le centre de symétrie de la courbe de la fonction f

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

Montrons que le point $\Omega(1;2)$ $(a=1;b=2)$ est le centre de symétrie de (C_f) la courbe de f

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=4x^3+\dfrac{3}{4}x$

Montrons que la fonction f est impaire , en déduire son domaine d'étude

III Étude de quelques fonctions numériques

1 Étude de la fonction $x\mapsto ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

• Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par; $f(x)=-2x^2+8x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ et $f(2)$
2. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

3. Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f et donner le tableau de variations de la fonction f
4. Montrer que la fonction f admet une valeur minimale à déterminer
5. a. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses
   b. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées
6. Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0
7. Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

• Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par ; $f(x)=x^2-6x+5$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. Calculer $f(0)$,$f(1)$ et $f(-1)$
2. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f et donner le tableau de variations de la fonction f
4. Montrer que la fonction f admet une valeur minimale à déterminer
5. Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses
6. Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0
7. Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

2 Étude de la fonction $x\mapsto ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$

• Exemple

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par ; $f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. Calculer $f(0)$ et $f(\sqrt{3})$
2. Montrer que la fonction f est impaire ,en déduire $f(-\sqrt{3})$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
4. Calculer $f'(x)=(x-1)(x+1)$ pour tout x réel et donner le tableau de variations de la fonction f
5. Construire la courbe (C_f) dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$
7. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes : $f(x)>0$ et $f(x)\leqslant 0$

8 Déterminer graphiquement le nombre de solutions de les équations suivantes :
• $f(x) = -\frac{7}{11}$ • $f(x) = 2023$

• Exemple

Soit f la fonction numérique définie par ; $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2 a Vérifier que $(\forall x \in D_f) : f(x) = (x-1)(x^2+x-2)$

b Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses

3 Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f et donner le tableau de variations de la fonction f

4 Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 2

5 Calculer : $f(0)$; $f(2)$ et $f(-1)$

6 Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le même repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

7 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes : $f(x) > 4$ et $f(x) \leqslant 4$

3 Étude de la fonction $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2 calculer $f(0)$, $f(2)$ et $f(-\frac{1}{2})$

3 Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$

Puis déduire les équations des asymptotes de la courbe (C_f)

4 Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f et donner le tableau de variation de la fonction f

5 Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0

6 Construire la courbe (C_f) et la tangente (Δ) et les asymptotes de la courbe (C_f) dans le même repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x-3}{2-x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f
2. calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$
3. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)$
   Puis déduire les équations des asymptotes de la courbe (C_f)
4. Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f et donner le tableau de variation de la fonction f
5. Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 3
6. Construire la courbe (C_f) et la tangente (Δ) et les asymptotes de la courbe (C_f) dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$